교육과정평가연구
The Journal of Curriculum and Evaluation
2016, Vol. 19, No. 3, pp. 71～100

2014년 국가수준 학업성취도 평가의 고등학교 수학과 서답형 문항에 대한 반응 분석[1)]

이 광 상(한국교육과정평가원 연구위원)*

<요 약>

본 연구의 목적은 국가수준 학업성취도 평가의 수학과 서답형 문항에 대한 학생의 반응 분석을 통해 학생들의 학업성취 특성에 대한 상세한 정보를 파악함으로서 교수학습의 시사점을 도출하는 데 있다. 이를 위해 2014년도 고등학교 학업성취도 평가 서답형 문항을 대상으로 학생들의 답안 내용을 유형별로 분류하고 각 유형의 특징을 학업성취도 평가 결과와 연계하여 분석하였다. 분석 결과를 요약하면 다음과 같다. 첫째, 보통학력 수준 이하의 학생들에게는 조건, 조건의 부정, 진리집합, 명제와 같은 수학적 용어에 대한 의미를 분명하게 이해시킬 필요가 있다. 둘째, 조건과 명제를 다룰 때 집합과 연계하여 효과적으로 지도할 수 있는 방안 모색과 더불어 일차함수 그래프에서 기울기 의미에 대한 이해도를 제고하기 위한 교수·학습 보완이 요구된다. 셋째, 좌표평면 위의 두 점의 좌표가 주어졌을 때 직선의 방정식을 구하는 방법에 대한 이해도 제고와 더불어 원의 접선의 방정식을 효과적으로 구하는 방법에 대한 교수·학습이 강화될 필요가 있다. 특히 기하 영역에 관련된 학습 내용을 다룰 때에는 함수 영역의 내용과 연계를 지어 효과적으로 지도할 필요가 있다. 넷째, 학생들이 문제를 해결할 때 문제에서 제시하는 조건이 무엇인지에 대한 내용을 꼼꼼하게 점검하는 메타인지적인 학습 습관을 길러 줄 필요가 있다.

주제어 : 학업성취도 평가, 서답형 문항, 성취수준, 학생의 반응 분석

---

1) 본 연구는 2015년 한국교육과정평가원이 주최한 학술세미나(2015.9.17.)에서 발표한 ‘국가수준 학업성취도 평가의 서답형 문항에 대한 학생 반응 분석: 고등학교 수학과 서답형 문항에 대한 학생 반응 분석’과 이인호 외(2015)의 국가수준 학업성취도 평가의 서답형 문항 심층 분석(pp. 116-137)의 내용을 수정·보완한 것임.

* 제1저자 및 교신저자, leeks@kice.re.kr

Ⅰ. 서론

국가수준 학업성취도 평가(이하 학업성취도 평가)의 목적은 현행 교육과정에 따른 성취기준을 학생들이 잘 이해하고 있는지를 점검하여 교육과정을 개선하기 위한 기초 자료를 산출하는 것과 더불어 학업성취도 평가 문항 분석을 통해 성취수준별 학업성취 특성을 도출해 학교 현장의 교수·학습 상황을 개선하는 데 있다. 최근 교육부에서는 학생의 꿈과 끼를 키우기 위한 주요 과제로 창의·융합형 미래인재 육성을 위한 교육과정 현장 안착과 관련된 내용으로 2015 개정 교육과정 현장 적용을 위한 준비, 자기주도적 학습 역량을 키우기 위한 학생참여중심 수업 활성화, 배움을 즐기는 수학교육 실현 방안을 제시하였다(교육부, 2016). 이러한 교육정책을 실현하는 데 학업성취도 평가 결과 분석 자료는 중요한 시사점을 제공할 수 있다.

이에 평가원에서는 매년 전년도의 학업성취도 평가 결과에 대한 전체 정답률, 답지별 반응률(서답형은 부분점수별 정답률), 성취수준별[2] 정답률을 중심으로 성취수준별 비율, 성별 성취도 점수의 평균, 지역별(대도시, 중·소도시, 읍·면지역) 성취도 점수의 평균, 내용 영역별 문항 분석 자료를 제시하고 있다(조윤동 외, 2012; 김동영 외, 2013; 이인호, 조윤동, 이광상, 2014, 2015). 2013년 이후에는 초·중학교를 중심으로 학업성취도 평가의 선다형 문항에 대한 심층연구가 수행되었다. 2010년부터 2012년까지의 초등학교 6학년과 중학교 3학년의 학업성취도 평가에서 성취수준별로 지속적으로 숙달도를 보인 성취기준에 해당하는 문항 분석을 토대로 학업성취 특성을 추출하고 이와 관련된 교육과정 내용, 교수·학습 방법, 평가에 관련한 시사점을 도출하였다(조윤동, 이광상, 2014; 이광상, 조윤동, 2014). 또한 2014년에는 평가 결과를 각 문항에 대한 기술통계치 중심으로 분석했던 기존의 연구와 달리 2010~2013년에 출제된 선다형 문항에 대하여 각 문항마다 성취도 점수에 대한 답지 반응률 분포 곡선을 산출하였고, 이를 통해 성취도 점수에 따라 정답지와 오답지에 어떻게 반응하고 있는지를 세부적으로 분석하여 교수·학습에 유익한 시사점을 제공하였다(이인호 외, 2014; 조윤동, 이광상, 2015).

위와 같이 학업성취도 평가의 선다형 문항에 대한 연구는 지속적으로 수행되고 있지만 서답형 문항에 대한 심층 분석은 미진한 편이다. 서답형 문항은 학생들이 직접 답안을 작성하기 때문에 답안 내용을 분석한다면 선다형에 비해 학생들의 문제해결 과정에 대한 다양한 정보를 파악할 수 있는 장점을 갖고 있다. 현재 운영되고 있는 2009 개정 교육과정에서 제시한 평가에서도 선택형 위주의 평가를 지양하고 서술형 평가, 관찰, 면담, 자기평가 등의 다양한 평가 방법을 활용하는 것을 강조하고 있고(교육과학기술부, 2011), 2015 개정 수학과 교육과정에서도 학습 결과 평가뿐만 아니라 과정 중심 평가를 강조하면서 선택형, 단답형, 서·논술형 등의 다양한 문항 형태를 활용하는 것을 권장하고 있다(교육부, 2015).

2) 학업성취도 평가에서는 성취수준을 우수학력, 보통학력, 기초학력, 기초학력 미달의 네 수준으로 분류하고 있다.

이에 학업성취도 평가에서도 해마다 서답형 평가 문항을 매년 출제하고 전년도의 서답형 문항 분석 결과를 제시하고 있지만, 기술 통계치인 전체 정답률, 부분점수별 정답률, 성취수준별 정답률을 중심으로 제시하고 있어 학생들의 답안에 대한 다양한 정보를 파악하는 데 어려움이 있다. 이와 같은 서답형 문항 분석을 통해서도 성취수준별로 성취기준에 대한 숙달도는 어느 정도인지 파악할 수 있지만 구체적으로 학생들이 문제해결 과정에서 어떠한 오류를 범하는지, 어떠한 수학적 내용에 대한 이해가 부족한지, 성취수준별로 어떠한 교수·학습을 보완해야 하는지에 대한 구체적인 정보를 도출하기에는 제한점이 있다.

따라서 이러한 점을 보완하기 위해서는 서답형 문항에 대해 학생들이 작성한 답안 내용을 중심으로 답안의 유형을 분류하고, 이를 토대로 성취수준별로 또는 답안 유형별로 학생들이 보완해야 할 것이 무엇이고 교사가 가르칠 때 어떠한 점을 유의해야 하는지에 대한 내용을 분석할 필요가 있다. 학교 현장에서도 수학 학습 과정에서 발생하는 학생들의 오류를 유형별로 분류하고 학생들의 오류를 이해하고 이를 바탕으로 학생들의 학습을 안내·지도·평가하는 활동은 교수·학습의 측면에서 중요하다(김부미, 2005). 이에 학업성취도 평가에서 학생들의 답안 내용을 유형별로 분류하여 빈도를 분석하는 것 이외에 성취도 점수에 따른 부분점수 비율 분포 곡선과 답안 유형별 비율 분포 곡선 등에 대한 새로운 분석 방법을 적용하여 학생들의 학업성취 특성에 대한 보다 상세한 정보를 얻고자 한다.

본 연구의 목적은 국가수준 학업성취도 평가의 수학과 서답형 문항에 대한 학생의 반응 분석을 통해 학생들의 학업성취 특성에 대한 상세한 정보를 파악함으로서 교수학습의 시사점을 도출하는 데 있다. 본 연구의 목적을 달성하기 위해 수와 연산과 기하 영역에서 다음과 같은 연구 질문을 설정하였다. 첫째, 수와 연산 영역에서 조건의 부정, 명제가 참인 의미를 이해하고 있는가? 둘째, 기하 영역에서 직선의 방정식과 원의 접선의 방정식을 구할 수 있는가? 이에 2014년도에 출제된 서답형 문항의 실제 답안 내용을 전문가 협의회의 결과를 토대로 유형별로 분류하였고, 유형별 도수분포 및 비율 그래프와 하위 문항 답안 유형 사이의 관계에 대한 분석을 토대로 성취수준별 반응 특성을 심층적으로 분석하였다. 이러한 문항 반응 분석 결과는 서답형 문항의 새로운 문항 분석 방법을 포함하여 문항별로 학생들이 어떤 방식으로 사고하고 그것을 어떻게 표현하는지에 대한 경향을 합리적으로 추론할 수 있게 하고, 학교 현장의 교수·학습에 필요한 시사점을 제공함으로써 학생들의 학력 제고에 도움을 줄 것으로 기대된다.

Ⅱ. 이론적 배경

학업성취도 평가에서는 선다형과 서답형의 2가지 문항 유형으로 출제된다. 선다형 문항은 문항 내에 주어져 있는 답지 중에 하나를 고르는 문항 형태이며, 서답형 문항은 답지에 따라 정답을 선택하는 것이 아니고 학생들이 직접 정답이라고 생각하는 답안을 작성하도록 요구하

는 문항을 말한다. 학업성취도 평가에서 적용하고 있는 서답형 유형으로는 단답형, 완성형, 서술형이 있다. 단답형은 간단한 단어, 구, 절 혹은 수나 기호로 응답하는 문항 유형으로, 용어나 개념을 직접 묻거나 계산한 답을 적은 문제에 자주 사용된다. 또한 완성형은 질문을 위한 문장에 여백을 두어 이에 적합한 단어, 구, 기호, 수식 등을 써 넣는 방법이다. 서술형은 학생들의 문제해결 과정에서의 수학적인 사고 흐름을 파악할 수 있도록 풀이과정과 답을 함께 기술하게 하는 유형이다. 특히 서술형 문항은 학생들의 문제해결 과정을 직접 쓰도록 하게 함으로써 문제 해결 및 오류 유형을 직접적으로 파악할 수 있는 장점이 있다. 이러한 교수·학습 피드백의 장점을 살리기 위해 중학교 수학과의 경우에는 2009년부터 2016년까지 서술형 평가 문항이 해마다 출제되었고, 고등학교 수학과의 경우에도 2015년까지 주로 완성형과 단답형 위주로 출제되었지만 2016년부터 서술형 문항이 출제되고 있다. 이러한 출제 방향은 2015 개정 수학과 교육과정에서 제시한 평가 방법에서 제시한 바와 같이 수학과의 평가는 학습 결과 평가뿐만 아니라 과정 중심 평가도 실시하여 종합적인 수학 학습 평가가 될 수 있도록 권고하고 있는 것을 반영하고 있는 것이다(교육부, 2015).

서답형 문항 분석과 관련된 연구는 단답형과 완성형보다는 서술형 평가 중심으로 이루어졌다. 우리나라의 서술형 평가와 관련된 연구는 크게 서술평 평가 문항 개발 관련 연구(김민경 외, 2008; 노선숙 외, 2008a; 김성규, 유윤재, 2006 등), 서술형 평가에 대한 교사들의 인식 및 실태에 관한 조사 연구(이선비 외, 2014; 김래영, 이민희, 2013a; 김민경, 조미경, 주유리, 2012, 노선숙 외 2008b 등), 학교 현장을 중심으로 서술형 평가에서 나타난 오류 유형을 분석한 연구(김성희, 2012; 김래영, 이민희, 2013b; 정현도, 강신포, 김성준, 2010; 한경민, 고상숙, 2014 등)의 세 가지 유형의 연구가 있다. 특히 수학적 오류에 관련된 연구는 김부미(2005)가 지적한 바와 같이 수학 교육 전문가에게 학생들의 현재 지식 상태를 진단할 수 있도록 하고 학생들의 수학 학습에서의 어려움에 대한 정보를 제공함으로써 학생들의 오류를 예측·처방하거나 새로운 개념을 탐구·학습하기 위한 토대가 될 수 있다는 교육적 의미를 지닌다고 할 수 있다. 수학적 오류에 대한 연구는 1990년대 초부터 주로 산술 영역에 한정되어 진행되었으며(Radatz, 1979: 김부미, 2005, p. 461에서 재인용), 1980년대 이후 여러 학자들(Vinner, 1983; Resnick et al., 1989; Sfard, 1991; Fischbein, 1997; Ashlock, 2002: 김부미, 2005, p. 461에서 재인용)에 의해 수학의 여러 영역에서 활발히 진행되고 있다.

본 연구와 직접적으로 관련 있는 수학적 오류에 관한 연구를 좀 더 구체적으로 살펴보면 다음과 같다. 정현도, 강신포, 김성준(2010)의 연구에서는 초등학교 4학년 학생을 연구대상으로 오류 유형을 분석하였는데, 문항 이해의 오류, 개념 원리의 오류, 자료 사용의 오류, 풀이 과정의 오류, 기록 단계의 오류, 풀이 과정의 생략 등의 6가지 유형으로 구분하여 문항별 답안에서 나타나는 유형별 오류를 분석하였다. 또한 한경민, 고상숙(2014)의 연구에서는 기술의 오류나 논리적 판단의 오류, 잘못된 정의나 정리의 사용에 관한 오류 유형으로 분류하였다.

또한 김래영, 이민희(2013b)의 연구에서는 중학교 2학년 학생을 대상으로 대수 영역에 대한 오류 분석을 했는데, 오류 유형으로 '미지수 사용의 오류', '기호, 수식 표현의 오류', '수학 내적 오류', '실생활 맥락과의 연결성 오류'. '문제에서 주어진 정보 이해의 오류', '부적절한 추론의 오류'. '계산의 오류', '풀이과정 생략에 따른 오류'로 분류하여 분석을 하였다. 그리고 김성희(2012)의 고등학교 함수의 극한과 연속성 영역을 중심으로 한 오류 내용으로는 직관에 의한 대략적인 풀이를 한 경우, 사고과정을 생략하고 답만 쓰는 경우, 문제를 일반화시키는 능력이 부족해 답만 구하는 경우 등을 제시했다.

하지만 위의 연구들은 주로 한 학교 단위로 일부 학생들을 사례로 분석을 했기 때문에 연구 성과를 일반화하기에는 여러 가지 제한점이 있어 학업성취도 평가와 같은 국가 단위에서 운영하는 시험의 결과를 체계적으로 분석하여 시사점을 도출하는 것이 필요하다.

최근에 2013년 중학교 수학과 학업성취도 평가의 서답형 문항 중 '문자와 식'과 '함수'영역에서 출제된 단답형과 서술형문항을 중심으로 문제해결 과정에서 나타나는 오류 유형을 분석한 연구(조윤동, 고호경, 2015)가 있다. 이 연구에서는 기술 통계적인 방식을 사용하여 문항에 대한 학생들의 반응 유형을 분류하고 유형별 비율을 제시하면서 학생들의 반응을 추론하고자 하였다. 그리고 학생들의 오류 중 가장 중요한 사항으로 문자와 식 영역과 함수 영역에서 학생들이 문제를 이해하지 못해서 나타나는 오류가 많다는 것과 문장제 문항에서 '문제 이해의 오류'는 문제를 해결하는 과정에서 '풀이 과정의 오류'와 '풀이 과정의 생략'이라는 오류로 나타난다는 것을 지적하였다. 이 연구의 경우도 학업성취도 평가에서 학생의 답안 내용을 유형별로 분석하여 다양한 시사점을 제공했지만 주로 기술 통계적인 방식을 사용하여 분석했기 때문에 오류 유형이 주로 어느 성취수준에서 어떻게 나타나는 지를 구체적으로 파악하는 데에는 제한점이 있다.

이에 본 연구에서는 이러한 제한점을 보완하기 위해 고등학교 학업성취도 평가의 서답형 문항에 대한 학생 반응의 답지 유형별 빈도를 조사하고 학생의 성취수준별 답지 반응 양상을 분석하는 새로운 서답형 문항 분석 방법론을 도입하여 보다 구체적인 교수·학습 시사점을 도출하고자 한다.

Ⅲ. 서답형 문항 분석 방법

1. 서답형 문항 분석 절차

본 연구에서는 2014년에 시행한 고등학교 2학년 학업성취도 평가에서 검사 동등화와 채점 기준 확정을 위해 추출한 표집 집단의 평가 결과를 활용하였다. 그렇지만 표집 집단 전체 학생의 서답형 답안을 유형별로 정리하여 분석하기에는 많은 시간이 소요되어 학업성취도 평가

표집 방법인 체계적 표집법[3]을 한 번 더 적용하여 일부를 추출하였다. 구체적으로 제시하면 전체 237개 표집 고등학교(학생 수: 7,500명)에서 39개 학교를 추출하여 1,246명 학생의 답안 내용을 분석하였다. <표 1>은 연구 대상으로 설정한 39개 학교에 대한 배경으로 설립유형, 지역규모, 학교유형, 성별유형에 따른 학교 수를 나타낸 것이다.

<표 1> 39개 학교에 대한 배경

설립 유형		지역 규모			학교 유형			성별 유형		
공립	사립	대도시	중소도시	읍면 지역	일반고	자율고	특목고	남고	여고	남녀 공학
22	17	18	14	7	34	1	4	9	9	21

학생들의 답안 내용을 분석하여 교수·학습의 시사점을 도출한 절차는 다음과 같다.

2010-2014년 서답형 문항 검토 및 선정 ➜ 서답형 문항 답안 입력 ➜ 문항별 답안 유형 분류 및 분석 ➜ 교수·학습 시사점 도출

[그림 1] 서답형 문항 답안 분석 절차

위에서 제시한 고등학교 수학과 서답형 답안을 분석한 절차를 구체적으로 기술하면 다음과 같다. 첫째, 2010-2014년에 출제된 모든 서답형 문항의 분석의 필요성 여부를 검토한 후 2014년 학업성취도 평가의 서답형 문항 중 ‘수와 연산’ 영역에 해당하는 서답형 2번과 ‘기하’ 영역에 해당하는 서답형 4번의 문항을 분석 대상으로 선정하였다. 2010년부터 2014년까지의 고등학교 학업성취도 평가에서 20개의 서답형 문항을 대상으로 문항 분석의 필요 여부를 점검한 결과, 11문항은 단순한 정답의 유무만 파악할 수 있는 문항으로 나타나 이 문항들은 심층 분석 대상에서 제외했다. 이에 따라 학생들의 문제해결 과정에서의 오류 유형을 파악하여 시사점을 도출할 수 있는 문항으로 <표 2>에서 제시한 바와 같이 9문항을 선정하였지만 연구 인력과 문항 분석 소요 시간, 내용 영역, 평가 내용, 교육과정(시의성)등을 고려하여 2014년도에 출제된 수와 연산과 기하 영역에 해당하는 2문항을 최종 분석 대상 문항으로 선정하였다.

<표 2> 2010-2014년 서답형 심층 분석 대상

순	연도	문항 번호	내용 영역	평가 내용	정답 유형
1	2010	1	문자와 식	근과 계수의 관계 이해하기	숫자
2	2010	4	함수	합성함수 구하기	숫자, 식
3	2011	1	수와 연산	복소수의 사칙계산	식
4	2011	2	문자와 식	이중근호를 포함하는 무리식을 계산하기	숫자, 식

3) 체계적 표집법은 표집 가능한 학생 수에 비례한 확률(Probability Proportionate to Size: PPS)에 의하여 추출하는 방법을 말한다(김경희 외, 2014, pp. 72-73). 수학과에서는 문항의 특성상 전수평가에서 추출한 표집집단 학생 전체 답안을 분석하는 데 어려움이 있어, 체계적 표집법을 한 번 더 적용하여 1300명 정도의 학생이 나올 수 있도록 학교를 다시 추출하였다.

순	연도	문항 번호	내용 영역	평가 내용	정답 유형
5	2011	4	함수	사인함수의 그래프와 그 그래프의 성질 알기	문자, 숫자, 그래프
6	2012	1	수와 연산	명제와 관련된 여러 가지 개념 이해하기	숫자, 식
7	2012	2	함수	무리함수의 그래프를 그리고, 그 성질 이해하기	부등식, 그래프
8	2014	2	수와 연산	명제와 조건의 의미 이해하기	숫자
9	2014	4	기하	원의 접선의 방정식 구하기	숫자, 식

둘째, 체계적 표집법으로서 2단계 층화 군집 방식을 두 차례에 걸쳐 적용하여 선정한 39개 학교 1,246명의 서답형 2번과 서답형 4번의 답안 내용을 하위 문항 단위로 엑셀 프로그램에 입력하였다.

셋째, 서답형의 하위 문항별로 입력한 답안 내용을 전체적으로 검토한 후 몇 개의 유형으로 분류하였다. 우선 하위 문항별로 답안을 검토한 후 연구자가 답안 유형을 1차로 분류를 하였고, 이어서 수학교육 전문가와의 협의회[4]를 통해 답안 유형 분류의 타당성을 검토한 후 답안 유형을 확정하였다. 그리고 성취도 점수에 대한 답안 유형의 인원수 및 비율 그래프와 하위 문항 간 답안 유형 사이의 관계에 대한 분석을 기초로 학생들이 해당 문항에 대하여 반응한 경향을 파악하였다.

넷째, 위와 같은 분석을 토대로 고등학교 2학년 학생들의 ‘수와 연산’ 영역과 ‘기하’ 영역의 서답형 문항에 대한 학업 성취 특성을 성취수준과 반응 유형별로 파악하고자 하였고, 이를 토대로 교수·학습에 필요한 시사점을 도출하였다.

이와 같은 서답형 문항의 심층 분석은 수와 연산 영역의 조건과 명제, 기하 영역의 직선의 방정식과 접선의 방정식에 대한 학생들의 이해 정도에 대한 다양한 정보를 제공할 수 있고, 이러한 정보는 학교 현장에서의 교수·학습을 지원하는 데 기여할 수 있을 것으로 기대된다.

2. 분석 대상 서답형 문항의 일반 정보

가. 2014년 서답형 2번

이 문항은 수와 연산 영역의 명제와 조건에 관련된 문항으로 조건 p의 부정 $\sim p$의 진리집합을 원소나열법으로 나타낼 수 있는지, 명제 $\sim p \rightarrow q$가 참이 되도록 하는 특정한 자연수 n의 값을 구할 수 있는지를 알아보기 위하여 출제되었다. <표 3>은 서답형 2번 전체와 하위 문항별로 전체 집단이 보인 정답률과 변별도, 성취수준별 정답률, 부분 점수별 반응 분포를 나타낸 것이다.

4) 2015년 9월 3일 원내 연구자 3명, 원외의 수학 교육 전문가 5명이 참여한 국가수준 학업성취도 평가 서답형 문항 분석 관련 전문가 협의회를 통해 문항별 답안 유형을 결정함.

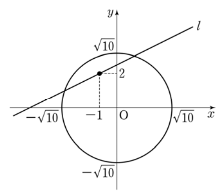
> 전체집합 $U=\{x|x$ 는 자연수$\}$에 대하여 두 조건 p, q가
> $$p\ :\ x<3\ \text{ 또는 } x>6$$
> $$q\ :\ n\le x\le 3n$$
> 일 때, 물음에 답하시오.
> (1) 조건 p의 부정 $\sim p$의 진리집합을 원소나열법으로 나타내시오.
> (2) 명제 $\sim p\rightarrow q$가 참이 되도록 하는 자연수 n의 값을 모두 구하시오.

<표 3> 2014년 서답형 2번 모집단의 반응 결과

문항 번호	행동 영역	정답률 (%)	변별도	성취수준별 정답률(%)				부분 점수 반응 분포(%)				
				우수	보통	기초	기초미달	0	1	2	3	4
2		57.36	0.66	98.35	55.50	8.29	4.14	33.33	5.51	6.75	7.22	47.19
2_(1)	계산	59.41	0.67	99.05	58.54	8.45	3.68	39.79	1.60	58.61	-	-
2_(2)	이해	55.31	0.72	97.65	52.46	8.12	4.60	38.52	12.34	49.14	-	-

<표 3>을 살펴보면 서답형 2번의 전체 정답률[5)]은 57.36%이고 변별도는 0.66으로 매우 높게 나타났다. 하지만 기초학력과 기초학력 이하 수준의 학생들의 정답률이 각각 8.29%, 4.14%로 나타난 것으로 보아 이 수준의 학생들이 해결하기에는 어려운 문항이라는 것을 알 수 있다.

나. 2014년 서답형 문항 4번

> 그림과 같이 좌표평면 위에 원 $O\ :\ x^2+y^2=10$과 직선 l이 있다. 직선 l이 세 점 $\mathrm{A}(-a,\ 0)$, $\mathrm{B}(-1,\ 2)$, $\mathrm{C}(a,\ 5)$를 지날 때, 물음에 답하시오.
>
> 
>
>
> (1) 상수 a의 값을 구하시오.
> (2) 직선 l의 방정식을 $y=mx+n$이라 할 때, 상수 m, n의 값을 구하시오.
> (3) (2)에서 구한 직선 l과 원 O는 서로 다른 두 점에서 만난다. 이 두 점에서 원 O에 접하는 접선의 방정식을 각각 구하시오.

이 문항은 기하 영역의 원의 접선의 방정식과 관련된 문항으로 두 점을 지나는 직선의 방정식과 원 위의 두 점에서 그은 접선의 방정식을 구할 수 있는지를 알아보기 위해 출제되었다. <표 4>는 서답형 4번 전체와 각 하위 문항별로 전체 집단이 보인 정답률과 변별도, 성취수준별 정답률, 부분 점수별 반응 분포를 나타낸 것이다.

5) 선다형의 정답률은 {(정답자 수)÷(전체 수험생 수)}×100(%)로 산출하지만 서답형 문항의 정답률은 [(득점의 합계)÷{(배점)×(전체 수험생 수)}]×100(%)로 산출한다.

<표 4> 2014년 서답형 4번 모집단의 반응 결과

문항 번호	행동 영역	변별도	정답률 (%)	성취수준별 정답률(%)				부분 점수 반응 분포(%)					
				우수	보통	기초	기초미달	0	1	2	3	4	5
4		0.65	18.00	65.44	5.72	0.40	0.24	71.50	6.04	2.07	10.15	1.81	8.43
4_(1)	계산	0.68	25.07	79.42	11.81	1.83	1.13	74.93	25.07	-	-	-	-
4_(2)	이해	0.71	22.90	80.83	8.23	0.08	0.03	75.74	2.72	21.54	-	-	-
4_(3)	추론	0.53	9.57	43.06	0.18	0	0	89.61	1.66	8.74	-	-	-

<표 4>를 살펴보면 서답형 4번의 전체정답률은 18.00%이고 변별도는 0.65으로 매우 높게 나타났다. 보통학력 이하 수준의 학생들의 전체 정답률이 5.72%로 나타난 것으로 보아 이 수준의 학생들이 해결하기에는 어려운 문항이라는 것을 알 수 있다.

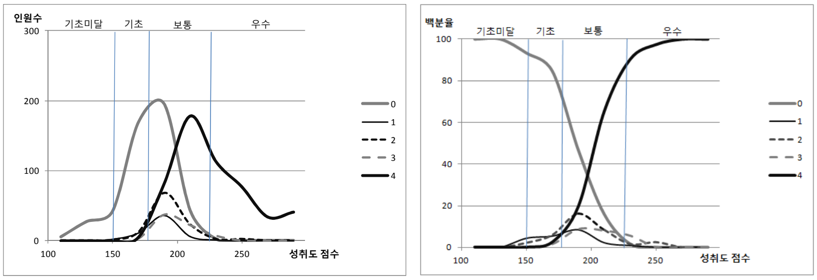
서답형 2번과 4번의 하위 문항에 대한 분석은 다음 장에서 심층적으로 분석하고자 한다.

Ⅳ. 서답형 문항 답안 내용 분석

서답형 문항의 답안 분석 내용은 서답형 2번, 서답형 4번의 순서로 기술한다. 각 문항에 대해서 하위 문항별로 답안 유형을 분류하고 각 유형이 차지하는 인원수와 비율을 산정하여 표로 나타내고, 성취도 점수에 대한 도수와 비율 분포를 그래프로 제시하였다. 그래프의 가로축은 성취도 점수, 새로축은 백분율이나 인원 수를 나타낸 것이고, 3개의 세로선은 기초학력 미달, 기초학력, 보통학력, 우수학력을 구분하는 선이다. 가로축에 제시한 성취도 점수는 평균 200점, 표준편차 30점, 범위 100~300점, 증분 1점을 적용하고 있다. 그리고 하위 문항별로 분류한 유형으로 답을 하게 된 과정과 원인을 추론하고, 그에 대한 교수·학습 방안에 대하여 기술하였다. 다음으로 하위 문항 간의 답안 유형이 서로 어떠한 영향을 주고 있는지에 대해 분석하고 그에 따른 시사점을 도출하였다.

1. 서답형 2번 답안 내용 분석

[그림 2]는 서답형 문항 분석 대상 답안 1,246개를 대상으로 성취도 점수에 대해 부분점수를 취득한 인원수 및 그 비율의 분포를 나타낸 그래프이다. [그림 2]를 살펴보면, 2번 문항에서 0점을 받은 학생들은 주로 보통학력 이하 수준에서 분포되어 있고, 4점을 맞은 학생들은 보통학력과 우수학력 중심으로 분포되어 있다는 것을 알 수 있다. 또한 부분 점수 1점과 2점은 기초학력과 보통학력을 중심으로 분포되어 있고, 3점은 보통학력과 우수학력 수준을 중심으로 분포되어 있다는 것을 알 수 있다.



[그림 2] 서답형 2번 문항의 성취도 점수에 대한 부분점수별 인원수 및 비율 그래프

아래에서는 두 하위 문항 2_(1)과 2_(2)에 대한 학생들의 답안을 유형별로 구분하여 도수 및 비율과 그 예를 제시하고 반응유형에 대하여 분석하고자 한다. 그리고 이어서 두 하위 문항을 연계하여 반응의 특성을 분석하여 교수·학습의 시사점을 도출하고자 한다.

가. 서답형 2_(1) 답안 유형 분석

<표 5>에서는 서답형 2_(1)에 대한 학생의 답안 유형을 4개로 분류하여 제시하고, 각 유형의 도수 및 비율과 그 예를 제시하였다.

<표 5> 2_(1) 답안 유형 분류와 답안의 예

유형	내용	개수(%)	예
유형1	조건 p의 부정 $\sim p$의 진리집합을 바르게 나타낸 경우	658(52.81)	$\{3,4,5,6\}$, $\{6,5,4,3\}$
유형2	조건 p의 부정 $\sim p$의 진리집합을 바르게 나타내지 못했지만 자연수로 집합의 원소를 나타낸 경우	123(9.87)	$\{4,5\}$, $\{3,4,5\}$, $\{4,5,6\}$ $\{1,2,3,4\}$, $\{1,2,3,5\}$, $\{4,5,6,7\}$, $\{2,3,4,5\}$ $\{1,2,9,12\}$, $\{1,2,7,8\}$ $\{3\}$, $\{3,6,9,12\}$, $\{4,8,12,16\}$
유형3	$\sim p$의 진리집합을 자연수로 나타내지 않은 경우	26(2.09)	$\{0,1,2,3\}$, $\{1,0,0,1\}$, $\{-1,0,1,2\}$, $\left\{4,5,\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right\}$ $\{x,x,x,x\}$, $\{x,3,x,6\}$, $\{3,6,n,3n\}$, $\{p, q, \sim p, \sim q\}$
유형4	무응답인 경우	439(35.23)	
계		1,246(100)	

유형1은 정답 $\{3,4,5,6\}$, $\{6,5,4,3\}$과 같이 조건 p의 부정 $\sim p$의 진리집합을 옳게 나타낸 경우로 658개(52.81%)의 답지가 해당된다.

유형2는 조건 p의 부정 $\sim p$의 진리집합을 바르게 나타내지 못했지만 자연수로 집합의 원소를 나타낸 경우로 123개(9.87%)에 해당되는데, 네 가지 경우로 생각해 볼 수 있다. 첫째로 조건 p의 부정을 나타내는 데 부등호를 잘못 사용하여 $3<x<6$, $3 \le x < 6$, $3 < x \le 6$에 속하는 원소를 쓴 경우이다. 즉 조건 p의 부정의 의미를 어느 정도 알고 있지만 등호의 포함 여부에 대하여 확실하게 이해하지 못한 경우이다. 이와 같은 답안의 예로는 $\{4,5\}$, $\{3,4,5\}$,

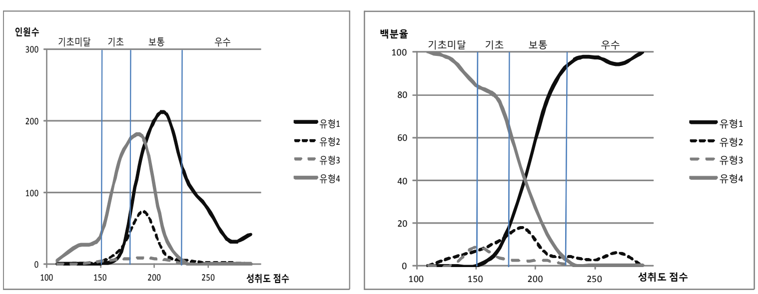
$\{4,5,6\}$이 있다. 둘째로 '$x \geq 3$ 또는 $x > 6$', '$x < 3$ 또는 $x \leq 6$'에 속하는 원소를 쓴 경우이다. 이 경우는 '또는'의 부정이 '그리고'라는 것을 인지하지 못하고 부등호의 방향만 일부 변환하여 그 조건에 맞는 원소를 구한 경우로 판단할 수 있다. 이와 같은 답안의 예로는 $\{1,2,3,4\}$, $\{1,2,3,5\}$, $\{2,3,4,5\}$, $\{4,5,6,7\}$등이 있다. 셋째로 $x < 3$ 또는 $x > 6$을 적용한 경우이다. 이 유형은 조건 p의 부정을 이해하지 못하고 같은 것인 p로 판단하여 그 조건에 맞는 원소를 구한 경우이다. 이와 같이 생각한 답안의 예로는 $\{1,2,9,12\}$, $\{1,2,7,8\}$등이 있다. 넷째로 조건 p의 부정에 속하는 원소를 자연수로 나타냈지만 무작위로 썼다고 판단되는 경우이다. 이와 같은 예로는 $\{3\}$, $\{3,6,9,12\}$, $\{4,8,12,16\}$등이 있다.

유형3은 $\sim p$의 진리집합을 자연수로 나타내지 않은 경우로 26개(2.09%)에 해당되는데, 두 가지 경우로 살펴볼 수 있다. 첫째는 조건 $\sim p$의 진리집합을 0, 음수, 분수로 나타낸 경우이다. 이와 같은 답안의 예로는 $\{0,1,2,3\}$, $\{1,0,0,1\}$, $\{-1,0,1,2\}$, $\left\{4,5,\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right\}$등이 있다. 둘째는 집합의 원소를 숫자로 나타내지 않은 경우이다, 이와 같은 답안의 예로는 $\{x,x,x,x\}$, $\{x,3,x,6\}$, $\{3,6,n,3n\}$, $\{p,q,\sim p,\sim q\}$등이 있다.

유형4는 무응답인 경우로 439개(35.23%)의 답지가 해당된다.

정리하면 유형2에서 확인한 것처럼 적지 않은 학생들이 조건 p의 부정의 의미에 대하여 잘 이해하지 못하고 여러 가지 방식으로 옳지 않게 해석하는 것을 알 수 있다. 따라서 두 조건 p, q에 대하여 조건 'p 또는 q'와 조건 'p이고 q'의 부정을 가르칠 때, 단순하게 '$<$'의 부정은 '$\geq$', '또는'의 부정은 '그리고'라는 암기식 지도보다는 '집합' 단원에서 배운 여집합과 드모르간의 법칙을 활용하거나 벤 다이어그램을 이용하여 조건의 부정의 의미를 직관적으로 확인할 수 있는 학습 기회를 제공할 필요가 있다. 또한 유형3과 유형4의 경우와 같이 전체집합, 조건, 조건의 부정, 진리집합의 의미에 관하여 전혀 이해하지 못하고 있는 학생의 경우에는 집합과 명제에 관련된 기본적인 용어의 의미에 대한 교육이 강조되어야 할 것으로 판단된다.

[그림 3]에서 왼쪽 그래프는 답안 유형에 대한 성취수준별 도수분포그래프이고, 오른쪽 그래프는 각 성취도 점수에 대하여 그 점수를 획득한 학생 수 전체에서 각 유형에 해당하는 학생 수가 차지하는 비율을 나타낸 그래프이다.



[그림 3] 서답형 2_(1)에서 유형별 도수분포 및 비율 그래프

[그림 3]을 유형별로 살펴보면, 유형1의 경우는 기초학력 상 수준의 학생을 다소 포함하였지만 주로 보통학력 수준 이상의 학생이 문제의 조건에 맞는 진리집합을 바르게 나타냈다고 볼 수 있다. 그리고 유형 2는 조건 p의 부정을 옳지 않게 판단한 경우로 주로 기초학력과 보통학력 수준의 학생에게서 이러한 현상이 집중되고 있다는 것을 알 수 있다. 또한 조건의 부정에 대한 의미를 전혀 이해하지 못하는 것으로 판단되는 유형3과 유형4의 경우에는 주로 보통학력 이하 수준에서 나타난다는 것을 알 수 있다.

나. 서답형 2_(2) 답안 유형 분석

<표 6>에서는 서답형 2_(2)에 대한 학생의 답안 유형을 4개로 분류하여 제시하고, 각 유형의 도수 및 비율과 예를 제시하고 있다

<표 6> 2_(2) 답안 유형 분류와 답안의 예

유형	내용	개수(%)	예
유형1	조건에 맞는 n의 값을 구한 경우	556(44.62)	$n=2,\ n=3$
유형2	(ㄱ) $n=2$만 맞은 경우 (ㄴ) $n=3$만 맞은 경우	123(9.87)	(ㄱ) '$n=1,\ n=2$', '$n=2,\ n=4$', '$n=2,\ n=7$' (ㄴ) '$n=1,\ n=3$', '$n=3,\ n=4$', '$n=3,\ n=9$'
유형3	(ㄱ) '$n=2, n=3$' 이외의 자연수를 쓴 경우 (ㄴ) n의 값을 자연수로 나타내지 않은 경우	121(9.71)	(ㄱ) '$n=1,\ n=10$', '$n=4,\ n=5$', '$n=10,\ n=30$' (ㄴ) '$n=0,\ n=-1$', '$n=0.3,\ n=5$', '$n=1,\ n=\frac{4}{3}$'
유형4	무응답	446(35.79)	
계		1,246(100)	

유형1은 명제 $\sim p \rightarrow q$가 참이 되도록 하는 자연수 n의 값 $2, 3$을 옳게 나타낸 경우로 556개(44.62%)의 답지가 해당된다.

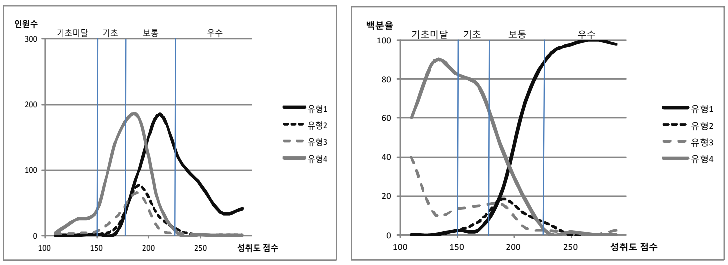
유형2는 명제 $\sim p \rightarrow q$가 참이 되도록 하는 자연수 n의 값 중 하나 만을 옳게 쓴 경우로 123개(9.87%)에 해당되는데 두 가지 경우로 살펴볼 수 있다. 첫째로 $n=2$만 옳게 쓴 경우로 123개 중 64개(52.03%)에 해당되고, 답안의 예로는 '$n=2,\ n=4$', '$n=2,\ n=7$', '$n=1,\ n=2$' 등이 있다. 둘째로 $n=3$만 옳게 쓴 경우로 123개 중 59개(47.97%)에 해당되고, 답안의 예로는 '$n=1,\ n=3$', '$n=3,\ n=4$', '$n=3,\ n=9$'등이 있다.

유형3은 명제 $\sim p \rightarrow q$가 참이 되도록 하는 자연수 n의 값을 모두 잘못 쓴 경우로 121개(9.71%)에 해당되는데 두 가지로 나누어 살펴본다. 첫째, n의 값을 자연수로 나타냈지만 모두 잘못 쓴 경우로 121개 중 93개(76.86%)에 해당되고, 그 예로는 '$n=1,\ n=10$', '$n=10,\ n=30$', '$n=4,\ n=5$'등이 있다. 둘째로 n의 값을 자연수로 나타내지 않은 경우로 121개 중 28개(23.14%)에 해당되고, '$n=0,\ n=-1$', '$n=0.3,\ n=5$', '$n=1,\ n=\frac{4}{3}$'등을 예로 들 수 있다.

유형4는 무응답인 경우로 446개(35.79%)의 답지가 해당된다.

정리하면 유형2의 경우에는 명제 $\sim p \rightarrow q$가 참이 되도록 하는 자연수 n의 값 중 하나만 옳게 쓴 경우로 학생들이 참이 되는 조건을 부분적으로 이해한 것으로 판단된다. 또한 유형3과 유형4의 경우에는 문제에서 제시하고 있는 명제의 의미, 명제가 참이 되기 위한 조건에 관해 전혀 이해하지 못하고 있는 것으로 나타났다. 따라서 '집합'에서 배운 내용을 바탕으로 명제 $\sim p \rightarrow q$가 참이 되기 위한 두 조건의 $\sim p, q$의 진리집합 $P^C = \{3, 4, 5, 6\}$, $Q = \{x | n \le x \le 3n\}$의 포함관계 $P \subset Q$에 대한 이해도를 제고할 수 있는 교수·학습 보완이 요구된다.

[그림 4]에서 왼쪽 그래프는 답안 유형에 대한 도수분포그래프이고, 오른쪽 그래프는 각 유형에 해당하는 학생 수가 차지하는 비율을 나타낸 그래프이다.



[그림 4] 서답형 2_(2)에서 유형별 도수분포 및 비율 그래프

[그림 4]를 유형별로 살펴보면, 유형1의 경우는 주로 보통학력 이상의 학생에 해당된다는 것을 알 수 있다. 그리고 유형2는 기초학력과 우수학력이 다소 있고 보통학력 수준 중심으로 분포되어 있다는 것을 알 수 있다. 하지만 유형3과 유형4는 기초학력과 보통학력 중심으로 분포되어 있는 것으로 나타났다. 따라서 보통학력 이하 수준의 학생에게 명제의 의미와 더불어 명제가 참이 되기 위한 조건에 대한 풍부한 예를 제공하여 학생의 이해도를 제고할 필요가 있다.

다. 서답형 2_(1)과 2_(2)의 답안 유형 사이의 관계

<표 7>에서는 2_(1)번의 각 유형에 대하여 2_(2)번에서 어떠한 답을 하였는지의 비율을 나타내었다. 2_(2)번은 명제 $\sim p \rightarrow q$가 참이 되도록 하는 자연수의 값을 구하는 문제로 2_(1)에서 묻고 있는 $\sim p$의 진리집합을 알아야만 해결할 수가 있다.

<표 7> 서답형 2_(1)과 서답형 2_(2)의 답안 유형 사이의 관계

(1)의 유형	개수(%)	(2)의 유형	(1)에서 차지하는 개수(%)
유형1	658(52.81)	유형1	518(78.72)
		유형2	65(9.88)
		유형3	40(6.08)
		유형4	35(5.32)
		계	658(100)

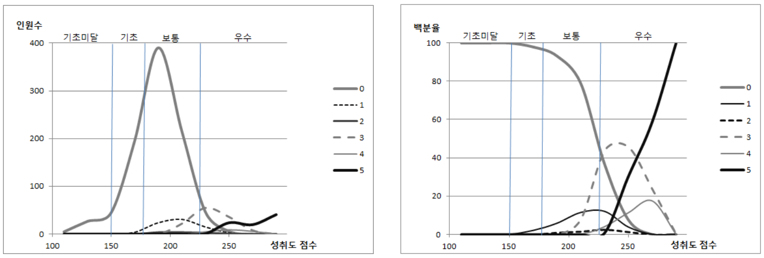
(1)의 유형	개수(%)	(2)의 유형	(1)에서 차지하는 개수(%)
유형2	123(9.87)	유형1	26(21.14)
		유형2	34(27.64)
		유형3	47(38.21)
		유형4	16(13.01)
		계	123(100)
유형3	26(2.09)	유형1	6(23.08)
		유형2	4(15.38)
		유형3	14(53.85)
		유형4	2(7.69)
		계	26(100)
유형4	439(35.23)	유형1	6(1.37)
		유형2	20(4.56)
		유형3	20(4.56)
		유형4	393(89.52)
		계	439(100)
계	1,246(100)		

<표 7>의 내용을 살펴보면, 우선 서답형 2_(1)의 유형1에 해당하는 답안 658개 중 서답형 2_(2)의 유형1에 해당하는 답안은 518개(78.72%)로 나타났다. 즉 조건 p의 부정을 진리집합으로 옳게 나타난 학생의 78.72%가 명제가 참이 되도록 하는 자연수의 값 두 개를 모두 바르게 구한 것이다. 반면에 서답형 2_(2)의 유형3과 유형4에 해당하는 75개(11.40%)에 해당하는 답안의 경우에는 $\sim p$의 진리집합의 의미는 알고 있었지만 명제가 참이 되는 조건은 잘 이해하지 못하는 것으로 나타났다. 따라서 이 답안을 쓴 학생의 경우에는 명제의 의미, 명제가 참이 되기 위한 조건 등에 대한 학습이 보완되어야 할 것으로 보인다. 또한 서답형 2_(1)의 유형2와 같이 조건의 부정의 의미와 진리집합의 의미에 대한 이해는 부족했지만 자연수를 진리집합으로 제시한 답안의 경우에는 123개 중 60개(48.78%)의 답안이 서답형 2_(2)의 유형1과 유형2에 해당하는 것으로 나타났다. 하지만 문제의 조건을 제대로 이해하지 못하여 자연수가 아닌 수를 진리집합으로 나타났거나 무응답을 한 서답형 2_(1)의 유형3과 유형4에 해당하는 학생들은 2_(2)의 유형1과 유형2에 해당하는 비율이 상대적으로 낮게 나타난 것을 알 수 있다.

2. 서답형 4번 답안 내용 분석

[그림 5]는 서답형 문항 분석 대상 답안 1,246개를 대상으로 성취도 점수에 대해 부분점수를 획득한 인원수 및 그 비율의 분포를 나타낸 그래프이다. [그림 5]를 살펴보면, 4번 문항 0점을 받은 학생들은 주로 보통학력 이하에서 분포되어 있고, 4점과 5점을 맞은 학생들은 우수학력 중심으로 분포되어 있음을 알 수 있다. 이것으로부터 이 문항은 우수학력에서 변별력을

나타내고 있다고 할 수 있다. 그리고 1, 2, 3점은 보통학력과 우수학력 수준이 골고루 분포되어 있는 것을 알 수 있다.



[그림 5] 서답형 4번 문항의 성취도 점수에 대한 부분점수별 인원수 및 비율 그래프

아래에서는 세 하위 문항 4_(1), 4_(2), 4_(3)에 대한 학생들의 답안을 유형별로 구분하여 도수 및 비율과 그 예를 제시하고 반응 유형에 대하여 분석하고자 한다. 그리고 이어서 세 하위 문항을 연계하여 반응의 특성은 무엇인지도 분석하고자 한다.

가. 서답형 4_(1) 답안 유형 분석

<표 8>에서는 서답형 4_(1)에 대한 학생의 답안 유형을 4개로 분류하여 제시하고, 각 유형의 도수 및 비율과 예를 제시하고 있다.

<표 8> 4_(1) 답안 유형 분류와 답안의 예

유형	내용	개수(%)	예
유형1	a의 값을 바르게 구한 경우	280(22.47)	$a=5$
유형2	양수를 쓴 경우	330(26.48)	$a=1,\ a=2,\ a=3,\ a=4,\ a=6,$ $\frac{3}{2},\ \frac{1}{5},\ \sqrt{10},\ 2\sqrt{2}$ 등
유형3	0또는 음수를 쓴 경우	72(5.78)	$a=0,\ a=-6,\ a=-5,\ a=-7,$ $-\sqrt{10}$, -3$\sqrt{10}$ 등
유형4	무응답	564(45.26)	
계		1,246(100)	

유형1은 문항에서 요구하고 있는 a의 값 5를 맞게 쓴 경우로 280개(22.47%)가 해당된다.

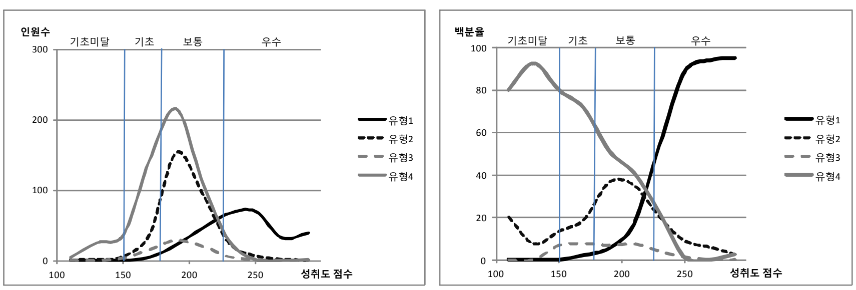
유형2는 문항에서 요구하고 있는 정답을 쓰지는 못했지만 양수로 나타낸 경우로 330개(26.48%)가 있고, 답안의 예로는 $a=1,\ a=2,\ a=\frac{3}{4},\ a=35,\ 2\sqrt{2}$ 등이 있다. 특히 양수에서 5보다 작은 자연수를 쓴 경우는 330개 중 181개(54.85%)로 나타났다.

유형3은 a의 값을 음수로 나타낸 경우로 72개(5.78%)가 있고, 답안의 예로는 $a=0$, $a=-1,\ a=-6,\ a=-5,\ a=-7,\ 3\sqrt{10}$ 등이 있다.

유형4는 무응답으로 564개(45.26%)가 해당된다.

정리하면 유형2는 a의 값을 양수로 판단하여 쓴 경우로, 문제에 제시되어 있는 그래프의 개형과 세 점을 살펴보면 a의 값이 양수라는 것을 알고 있는 것으로 판단할 수 있다. 하지만 두 점을 지나는 직선의 기울기가 같다는 사실을 적용하는 계산 과정에서 오류가 있었던 것으로 추측할 수 있다. 따라서 같은 직선 위에 있는 세 점 중에서 어느 두 점을 지나는 직선의 기울기를 구하더라도 언제나 같다는 것을 이용하여 a의 값을 구한 후 그래프의 개형에 적절한 a의 값인지를 검토하는 학습 습관을 강화할 필요가 있다. 또한 유형3의 경우는 문제에서 제시한 그래프의 개형과 세 점의 좌표를 이용하면 a의 값이 0또는 음수가 나올 수가 없는데도 불구하고 a의 값을 0또는 음수로 나타낸 경우이다. 이는 문제의 조건을 잘 이용하지 못했거나 기울기를 구하는 방법을 인지하지 못했기 때문인 것으로 판단된다. 이에 일차함수 그래프인 직선의 기울기는 중학교 교육과정에서 이미 학습한 부분을 상기시키면서 점의 좌표가 문자로 표현되어 있더라도 기울기를 나타낼 수 있다는 것을 다양한 예를 통해 제시해줄 필요가 있다. 또한 문제를 해결할 때, 문제에 제시된 여러 가지 조건들을 종합적으로 파악하는 문제해결 전략도 활용할 수 있도록 문제해결 방법에 대한 교육도 강화할 필요가 있다.

[그림 6]에서 왼쪽 그래프는 답안 유형에 대한 도수분포그래프이고, 오른쪽 그래프는 각 유형에 해당하는 학생 수가 차지하는 비율을 나타낸 그래프이다.



[그림 6] 서답형 4_(1)에서 유형별 도수분포 및 비율 그래프

[그림 6]을 유형별로 살펴보면, 유형1의 경우는 주로 보통학력 이상의 학생에 해당된다는 것을 알 수 있다. 그리고 유형2, 유형3, 유형4은 기초학력과 우수학력이 다소 있고 보통학력 수준 중심으로 분포되어 있음을 알 수 있다. 즉 기초학력 이하의 거의 대부분의 학생들은 한 직선이 세 점을 동시에 지날 때, 세 점 중에서 임의의 두 점을 지나는 직선의 기울기가 같다는 것을 이용하여 $\frac{2}{a-1}=\frac{3}{a+1}$의 식을 세우지 못한 것으로 판단된다. 또한 보통학력에서는 유형1부터 유형4까지 다양하게 분포되어 있는 것으로 나타나 기울기의 의미에 대한 이해와 더불어 두 점의 좌표가 있을 때 기울기를 구하는 방법과 계산 과정에서의 오류 예방을 통해 학력 수준을 제고할 필요가 있다.

나. 서답형 4_(2) 답안 유형 분석

<표 9>에서는 서답형 4_(2)에 대한 학생의 답안 유형을 4개로 분류하여 제시하고, 각 유형의 도수 및 비율과 예를 제시하고 있다.

<표 9> 서답형 4_(2) 답안 유형 분류

유형	내용(도입식)	개수(%)	예
유형1	m, n의 값을 바르게 구한 경우	233(18.70)	$m=\frac{1}{2}, n=\frac{5}{2}$
유형2	그래프의 개형에 맞게 $m>0$, $n>0$인 값을 쓴 경우	282(22.63)	‘$m=1, n=2$’, ‘$m=1, n=1$’, ‘$m=1, n=3$’, ‘$m=2, n=2$’, ‘$m=2, n=3$’, ‘$m=2, n=4$’
유형3	그래프의 개형에 맞지 않게 m, n의 값을 쓴 경우	113(9.07)	‘$m=\frac{1}{4}, n=-\frac{1}{2}$’, ‘$m=2, n=-1$’ ‘$m=-2, n=3$’, ‘$m=-1, n=\frac{3}{2}$’ ‘$m=-1, n=-1$’, ‘$m=-2.5, n=-5$’ ‘$m=-1, n=0$’, ‘$m=-2, n=\sqrt{10}-2$’
유형4	무응답	618(49.60)	
계		1,246(100)	

유형1은 직선 l의 방정식을 $y=mx+n$을 구해 $m=\frac{1}{2}, n=\frac{5}{2}$의 값을 옳게 쓴 경우로 모두 233개(18.70%)의 답안이 해당된다.

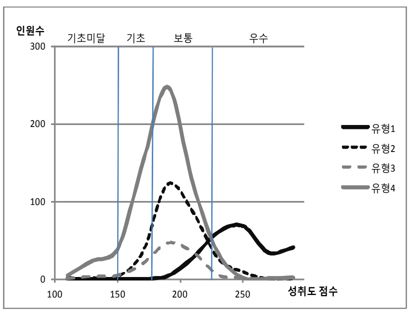
유형2는 직선 l의 방정식을 $y=mx+n$을 옳게 구하지 못했지만 $m>0$, $n>0$인 경우로 282개(22.63%)의 답안이 해당되며 그 예로는 ‘$m=1, n=2$’, ‘$m=3$, $n=\frac{5}{2}$’,‘$m=\frac{1}{2}$, $n=2\sqrt{2}$’ 등이 있다.

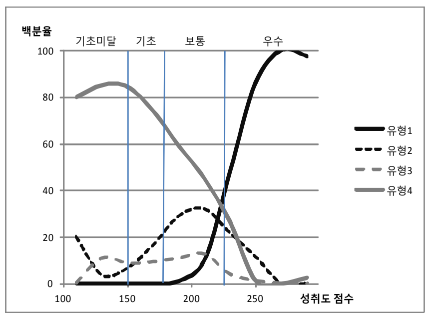
유형3은 문제에서 제시한 그래프의 개형에 맞지 않게 m, n의 값을 쓴 경우로 113개(9.07%)의 답안이 해당되며, 네 가지로 나누어 설명할 수 있다. 첫째는 $m>0$, $n<0$인 경우로 113개 중 23개(20.35%)의 답안이 해당되며 그 예로는 ‘$m=5, n=-10$’, ‘$m=\frac{1}{4}$, $n=-\frac{1}{2}$’, ‘$m=2$, $m=2$, $n=-1$’ 등이 있다. 둘째는 $m<0$, $n>0$인 경우로 113개 중 35개(30.97%)의 답안이 해당되며 ‘$m=-1, n=2$’, ‘$m=-\frac{1}{2}$, $n=\frac{5}{2}$’, ‘$m=-\frac{10}{7}$, $n=\frac{18}{7}$’ 등이 있다. 셋째는 $m<0$, $n<0$인 경우로 113개 중 6개(5.31%)의 답안이 해당되며 그 예로는 ‘$m=-\frac{7}{2}, n=-\frac{3}{2}$’, ‘$m=-3$, $n=-1$’, ‘$m=-2.5$, $n=-5$’등이 있다. 넷째로 0을 포함한 m, n값을 쓰거나 문자와 같은 의미 없는 답을 쓴 경우로 113개 중 39개(34.51%)의 답안이 해당되며 그 예로는 ‘$m=0$, $n=-1$’, ‘$m=x, n=y$’, ‘$m=x+1$, $n=x+1$’등이 있다.

유형4는 무응답으로 618개(49.60%)가 해당된다.

정리하면 유형2는 4_(1) 문항에서 잘못 구한 a의 값을 적용하여 직선의 방정식을 구한 경우와 a의 값은 잘 구했지만 직선의 방정식을 구하는 과정에서 오류가 있는 경우로 나눌 수 있다. 이 경우는 문제에서 제시된 일차함수 그래프의 기울기와 y절편의 부호는 일치하지만 값이 다른 경우로 직선의 방정식을 구해 시도한 경우로 추론할 수 있다. 따라서 이 경우에 해당하는 학생에게는 두 점의 좌표가 제시되어 있을 때 기울기와 y절편을 이용해 직선의 방정식을 구하는 방법에 대한 교수·학습이 강화되어야 할 것으로 보인다. 유형3의 경우에는 문제에서 제시된 일차함수 그래프인 직선에서 판단할 수 있는 기울기나 y절편의 부호와 다른 부호의 값을 구한 경우로 일차함수 그래프의 성질에 대한 이해가 부족하다는 것을 알 수 있다. 따라서 이 경우에 해당하는 학생에게는 중학교에서 배운 일차함수 그래프를 다양하게 탐구할 수 있는 기회를 제공하여 일차함수 그래프의 성질에 대한 이해도를 제고할 필요가 있다.

[그림 7]에서 왼쪽 그래프는 답안 유형에 대한 도수분포그래프이고, 오른쪽 그래프는 각 유형에 해당하는 학생 수가 차지하는 비율을 나타낸 그래프이다.





[그림 7] 서답형 4_(2)에서 유형별 도수분포 및 비율 그래프

[그림 7]을 유형별로 살펴보면, 유형1은 서답형 4_(1)의 유형의 경우와 마찬가지로 학생 수가 보통학력 중 수준 이상의 수준에 치우쳐 있는 것으로 보아 보통학력 하 수준 이하는 이 문항을 잘 해결하지 못했다는 것을 알 수 있다. 유형2, 유형3, 유형4는 보통학력을 중심으로 좌우대칭 형태로 분포되어 있고, 백분율 그래프를 보면 우수학력 중 수준 이하의 경우에도 이 유형들이 다소 분포되어 있는 것으로 보아 전체적으로 좌표가 문자로 주어졌을 때, 기울기와 직선의 방정식을 구하는 방법에 대한 교수·학습 보완이 필요하다.

다. 서답형 4_(1)과 4_(2) 답안 유형 사이의 관계

<표 10>에서는 4_(1)번의 각 유형에 대하여 4_(2)번에서 어떠한 답을 하였는지의 비율을

나타내었다. 4_(2)번은 직선 l의 방정식을 구하는 문제로 4_(1)번에서 a의 값을 구해야만 효과적으로 해결할 수 있다.

<표 10> 서답형 4_(1)과 서답형 4_(2)의 답안 유형 사이의 관계

4_(1) 유형	개수(%)	4_(2) 유형	(1)에서 차지하는 개수(%)
유형1	280(22.47)	유형1	220(78.57)
		유형2	41(14.64)
		유형3	5(1.79)
		유형4	14(5)
		계	280(100)
유형2	330(26.48)	유형1	7(2.12)
		유형2	214(64.85)
		유형3	63(19.09)
		유형4	46(13.94)
		계	330(100)
유형3	72(5.78)	유형1	5(6.94)
		유형2	23(31.94)
		유형3	32(44.44)
		유형4	12(16.67)
		계	72(100)
유형4	564(45.26)	유형1	1(0.18)
		유형2	4(0.71)
		유형3	13(2.30)
		유형4	546(96.81)
		계	564(100)
계	1,246(100)		

<표 10>의 내용을 살펴보면, 우선 서답형 4_(1)의 유형1에 해당하는 답안 280개 중 서답형 4_(2)의 유형1에 해당하는 답안은 220개(78.57%)로 나타났다. 즉 두 점의 좌표에서 제시된 a의 값을 옳게 구한 학생의 78.57%가 문제에서 제시된 좌표를 이용하여 직선의 방정식을 바르게 구한 것으로 볼 수 있다. 반면에 서답형 4_(2)의 유형2, 유형3, 유형4에 해당하는 60개(21.43%)에 해당하는 답안의 경우에는 a의 값은 옳게 구했지만 직선의 방정식을 구하는 방법은 잘 이해하지 못하는 것으로 나타났다. 따라서 이 답안을 쓴 학생의 경우에는 두 점의 좌표를 이용해 직선의 방정식을 구하는 방법에 대한 학습이 보완되어야 할 것으로 판단된다. 그리고 4_(1)에서 문제에서 제시한 그래프의 개형에 맞게 a의 값을 양수로 나타낸 유형2의 경우에는 직선의 방정식을 구하지는 못했지만 m, n의 값을 모두 양수로 나타낸 4_(2)의 유형2의

경우가 330개의 답안 중 214개(64.85%)로 다른 유형보다 상당히 높게 나타났다. 이러한 사실은 문제에서 제시한 그래프의 개형에서 기울기와 y절편의 값이 양수라는 사실은 어느 정도 인지하고 있다는 것으로 추론할 수 있다. 하지만 문제의 조건을 제대로 이해하지 못하여 a의 값을 양수가 아닌 다른 수로 나타낸 4_(1)의 유형3과 유형4의 경우에는 4_(2)의 유형1과 유형2에 해당하는 비율이 상대적으로 낮게 나타난 것을 알 수 있다.

라. 서답형 4_(3) 답안 유형 분석

4_(3) 문항은 4_(1)과 4_(2)를 바르게 풀어야만 해결할 수 있는 문항이다. 직선 l의 방정식을 알아야만 원과 만나는 두 점의 좌표를 구할 수 있기 때문에, 직선의 방정식을 구하지 못한 학생은 이 문항을 해결하는 것이 어렵다. 실제로 4_(2)를 해결한 답안의 개수는 233개(18.70%)이었지만 4_(3)을 해결한 답안의 개수는 87개(6.98%)로 나타나 11.72%p 정도 차이가 났다는 것은 학생들이 접선의 방정식을 구하는 문항을 어려워했다는 것을 알 수 있다.

<표 11>에서는 서답형 4_(3)에 대한 학생의 답안 유형을 5개로 분류하여 제시하고, 각 유형의 도수 및 비율과 예를 제시하고 있다.

<표 11> 서답형 4_(3) 답안 유형 분류

유형	내용	개수(%)	예
유형1	접선의 방정식 2개를 바르게 구한 경우	86(6.98)	‘$x+3y=10,\ -3x+y=10$’ ‘$x+3y-10=0, 3x-y+10=0$’ ‘$y=3x+10,\ y=-\frac{1}{3}x+\frac{10}{3}$’
유형2	두 개의 접선의 방정식 중 한 개만을 맞은 경우	20(1.61)	‘$3x-y+10=0, 3x+y-10=0$’ ‘$y=3x+10, y=\frac{1}{3}x+\frac{10}{3}$’
유형3	직선의 방정식 형태로 나타냈지만 틀린 경우	83(6.66)	‘$y=3x+10, y=\frac{1}{3}x+\frac{10}{3}$’ ‘$3x+y+10=0, x+3y+2=0$’, ‘$y=-3x-8, y=-3x+6$’
유형4	직선의 방정식으로 나타내지 않은 경우	124(9.95)	‘$2x+y, x+2y$’ ‘$-\frac{1}{3}x+\frac{5}{2}, 3x+\frac{5}{2}$’ ‘$5x+15, x-1$’ ‘$x^2+2x+1,\ x^3+x^2+x+2$’ ‘$y=2x^2+x-1,\ x^2+y^2=10$’ ‘$(1,3), (1,5)$’, ‘$10, \sqrt{2}$’
유형5	무응답	933(74.88)	
계		1,246(100)	

유형1은 직선 l과 원 O는 서로 다른 두 점에서 만날 때, 이 두 점에서 원 O에 접하는 접선의 방정식을 모두 옳게 구한 경우로 86개(6.98%)의 답안이 해당된다. 이 답안의 예로는 $ax+by=c$, $ax+by+c=0$, $y=ax+b$의 세 가지 유형으로 '$x+3y=10$, $-3x+y=10$', '$x+3y-10=0$, $3x-y+10=0$', '$y=3x+10$, $y=-\frac{1}{3}x+\frac{10}{3}$'가 있다. 학생들이 가장 선호하는 직선의 방정식 유형으로는 $y=ax+b$의 유형으로 전체 86개 중 43개(50%)로 나타났다. 그 이유는 중학교 교육과정에서 배운 직선의 방정식 유형의 영향을 받아 y에 관한 식으로 변형하는 것이 익숙하기 때문인 것으로 판단된다.

유형2는 두 개의 접선의 방정식 중 하나만 옳게 쓴 경우로 20개(1.61%)의 답안이 해당되며, 그 예로는 '$3x-y+10=0, 3x+y-10=0$', '$y=3x+10$, $y=\frac{1}{3}x+\frac{10}{3}$' 등이 있다. 유형2의 답안을 분석한 결과 $y=3x+10$이나 $3x-y+10=0$만을 옳게 쓴 답안이 20개 중 13개(65%), $y=-\frac{1}{3}x+\frac{10}{3}$이나 $x+3y=10$만을 옳게 쓴 답안이 7개(35%)로 나타났다. 이와 같이 두 개의 접선의 방정식 중 한 개만을 옳게 쓴 이유는 접선의 방정식을 구하는 과정에서의 계산 오류로 판단된다.

유형3은 접선의 방정식을 옳게 표현하지 못했지만 직선의 방정식 형태로 나타난 경우로 83개(6.66%)의 답지가 해당되며, 그 예로는 '$y=3x+1, y=3x-1$', '$y=\frac{1}{4}x+2, y=2x+3$', '$x+y-6=0$, $x+y+8=0$', $y=-2x+10, y=-2x+\frac{5}{2}$' 등이 있다.

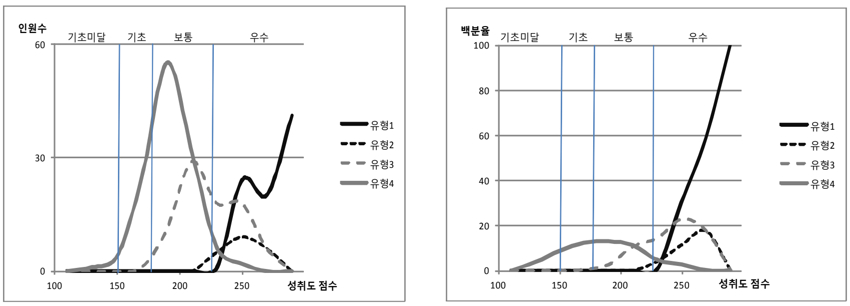
유형4는 접선의 방정식을 직선의 방정식의 형태로 나타내지 못한 경우로 124개(9.95%)의 답지가 해당되며 두 가지로 나누어 살펴본다. 첫째는 일차다항식의 형태로 나타낸 경우로 124개 중 9개(7.26%)의 답안이 해당되며 그 예로는 '$2x+y, x+2y$', '$-\frac{1}{3}x+\frac{5}{2}$, $3x+\frac{5}{2}$', '$5x+15$, $x-1$' 등이 있다. 둘째는 직선의 방정식이나 일차다항식이 아닌 기타의 경우로 124개 중 115개(92.74%)의 답안이 해당된다. 그 예로는 '$x^2+y^2=10$, $x^2+y^2=8$', '$(1,3)$, $(1,5)$', '10, $\sqrt{2}$' 등이 있다.

유형5는 무응답으로 933개(74.88%)가 해당된다.

정리하면 서답형4_(3)은 원 $x^2+y^2=r^2$ 위의 점(x_1, y_1)에서 그은 접선의 방정식은 $x_1x+y_1y=r^2$ 이라는 것을 이용하면 효과적으로 해결할 수 있는 문항이다. 하지만 유형1과 유형2를 제외한 1,140개(91.49%)의 답안을 작성한 학생들은 원 위의 점에서 그은 접선의 방정식을 구하는 방법에 대해 잘 이해하고 있지 못하다는 것을 알 수 있다. 특히, 유형4와 같이 접선의 방정식을 직선의 방정식의 형태로 쓰지 않은 학생의 경우에는 중학교 교육과정에서 배운 일

차함수 그래프의 성질에 대한 학습 기회의 제공과 더불어 접선의 방정식과 일차함수 그래프의 관계에 대한 이해를 제고시키는 교수·학습 활동이 요구된다.

[그림 8]에서 왼쪽 그래프는 답지 유형에 대한 도수분포그래프이고, 오른쪽 그래프는 각 유형에 해당하는 학생 수가 차지하는 비율을 나타낸 그래프이다. 서답형 4_(3)에서 제시한 그래프에서는 유형5에 해당하는 무응답 반응의 인원수가 차지하는 비율이 74.88%로 상당히 높고 다른 반응 유형의 인원수가 차지하는 비율이 낮은 이유로 유형5의 내용을 그래프에서 제외하였다.



[그림 8] 서답형 4_(3)에서 유형별 도수분포 및 비율 그래프

[그림 8]을 유형별로 살펴보면, 유형1의 경우는 우수학력 이상의 학생에 해당되고, 유형2의 경우는 보통학력 상 수준 이상의 학생이 주로 나타낸 유형으로 볼 수 있다. 그리고 유형3의 경우는 보통학력 이상 학생에게 주로 나타난 유형으로 접선의 방정식이 일차함수의 그래프라는 사실을 어느 정도 인지하고 있는 것으로 파악된다. 또한 유형4의 경우는 보통학력을 중심으로 하는 좌우대칭인 형태로 모든 학력 수준에 폭넓게 분포되어 있는 것을 알 수 있다. 이는 전체적으로 원의 접선의 방정식을 구하는 문제를 어려워하는 것으로 판단이 돼, 직선의 방정식과 원의 방정식을 연립하여 교점의 좌표를 구하는 방법과 원 위의 점에서 그은 접선의 방정식을 효과적으로 구하는 방법에 대한 다양한 교수·학습 방법이 요구된다.

다. 서답형 4_(2)와 4_(3) 답안 유형 사이의 관계

<표 12>에서는 4_(2)번의 각 유형에 대하여 4_(3)번에서 어떠한 답을 하였는지의 비율을 나타내었다. 4_(3)번은 접선의 방정식을 구하는 문제로 4_(2)번에서 물은 직선의 방정식을 바르게 구해야만 해결할 수 있다. 여기에서는 4_(2)의 유형1과 유형2에 대해서만 연계해서 분석하고자 한다.

<표 12> 서답형 4_(2)와 서답형 4_(3)의 답안 유형 사이의 관계

4_(2) 유형	개수(%)	4_(3) 유형	(1)에서 차지하는 개수(%)
유형1	233(18.70)	유형1	83(35.62)
		유형2	19(8.15)
		유형3	41(17.60)
		유형4	6(2.58)
		유형5	84(36.05)
		계	233(100)
유형2	282(22.63)	유형1	2(0.71)
		유형2	0(0)
		유형3	28(9.93)
		유형4	88(31.21)
		유형5	164(58.16)
		계	282(100)
계	515(41.33)		

<표 12>의 내용을 살펴보면, 우선 서답형 4_(2)의 유형1에 해당하는 답안 233개 중 서답형 4_(3)의 유형1과 유형2에 해당하는 답안은 102개(43.78%)로 나타났다. 즉 직선의 방정식은 바르게 구한 학생이 직선과 원의 두 교점에서 그은 접선의 방정식 두 개를 정확하게 구했거나 접선의 방정식 한 개만을 정확하게 구한 경우이다. 반면에 직선의 방정식은 바르게 구했지만 접선의 방정식을 구하지 못한 학생이 233개의 답안 중 131개(56.21%)로 나타나, 이와 같은 반응을 보인 학생의 경우에는 두 개의 방정식을 이용하여 교점의 좌표를 구하는 방법과 접선의 방정식을 구하는 방법에 대한 지도가 강화되어야 할 것으로 판단된다.

또한 4_(2)의 유형2의 경우에는 직선의 방정식을 구하지 못한 경우로 4_(3)의 경우도 이를 반영하여 282개의 답안 중 280개(99.29%)의 답안이 유형3, 유형4, 유형5에 속해 접선의 방정식을 전혀 구하지 못하는 것으로 나타났다. 즉 원의 접선의 방정식을 학습하기 이전에 학생들이 중학교 교육과정에서 배운 일차함수 그래프의 성질에 대한 이해가 제대로 되었는지를 확인하여 이해도가 부족한 학생에게는 이를 보충할 수 있는 학습 기회를 부여해야 할 것이다.

Ⅴ. 요약 및 제언

본 연구에서는 2014년 고등학교 수학과 학업성취도 평가의 수와 연산과 기하 영역의 서답형 문항에 대한 학생들의 답안 내용을 분석하여 교수·학습의 시사점을 도출하고자 하였다. 이

를 위해 표집 평가 대상인 39개 학교의 1,246명의 학생의 답안 내용을 분석하였다. 서답형 2번과 4번의 하위 문항 별 분석 결과, 성취수준별 수학적 오류 유형은 다음과 같이 나타났다.

첫째, 2_(1)의 조건에 관련된 문항에서, 보통학력과 기초학력 수준에서는 조건 p의 부정 $\sim p$의 진리집합을 바르게 나타내지 못했지만 자연수로 나타낸 유형2와 조건의 부정에 대한 의미를 전혀 이해하지 못하는 것으로 판단되는 유형3의 수학적 오류가 주로 나타났는데, 유형2가 유형3의 경우보다 우세한 것으로 나타났다. 즉 보통학력 수준 이하의 학생들은 전체집합의 의미는 이해하고 있지만 조건의 부정에 대한 의미를 이해하지 못하는 경향이 있는 것으로 파악되었다.

둘째, 2_(2)의 명제와 관련된 문항에서, 우수학력 수준에서는 조건에 맞는 n의 값 중 하나를 구한 유형2가 주로 나타났다. 보통학력 수준 이하에서는 유형2가 조건에 맞는 n의 값을 모두 잘못 쓴 유형3의 경우보다 우세하게 나타났지만 기초학력 수준은 유형3이 다소 우세하게 나타났다. 보통학력 수준 이하에서 명제가 참이라는 의미와 더불어 조건 p와 조건q의 진리집합의 관계를 적절하게 활용하지 못하는 학생들이 많은 것으로 판단할 수 있다.

셋째, 4_(1)의 세 점의 좌표가 같은 직선위에 있다는 조건을 이용해 a를 구하는 문항에서, 우수학력 수준에서는 a의 값을 구하지는 못했지만 양수를 쓴 유형2의 경우가 다소 발생한 것으로 나타났다. 또한 보통학력과 기초학력 수준의 경우에는 유형2 보다 0또는 음수를 쓴 유형3의 경우가 우세한 것으로 나타났다. 보통학력과 기초학력 수준의 경우 기울기를 구하는 방법 자체를 모르거나 세 점이 주어졌을 때, 두 점을 지나는 직선의 기울기가 서로 같다는 사실을 이해하지 못한 학생들이 많은 것으로 판단된다.

넷째, 4_(2)의 직선의 방정식을 구하는 문항에서, 우수학력 수준에서는 직선의 방정식은 구하지 못했지만 그래프의 개형에 맞게 m,n의 값을 양수로 표현한 유형2의 경우가 주로 발생하였다. 그리고 보통학력 수준에서는 유형 2가 그래프의 개형에 맞지 않게 m,n의 값을 양수가 아닌 다른 값으로 표현한 유형3의 경우보다 우세하게 나타났고, 기초학력 수준에서는 유형2와 유형3이 거의 유사하게 나타났다. 우수학력 수준의 학생들은 직선의 방정식과 일차함수 그래프의 관계를 어느 정도 이해하고 있지만 보통학력 수준 이하의 학생들은 이러한 관계를 이해하는 데 어려움이 있는 것으로 판단된다.

다섯째, 4_(3)의 원의 접선의 방정식을 구하는 문항에서, 우수학력 수준에서는 두 개의 접선의 방정식 중 한 개를 맞은 유형2의 경우보다는 접선의 방정식을 구하지는 못했지만 직선의 방정식 형태로 나타낸 유형 3의 경우가 많은 것으로 나타났다. 반면에 보통학력과 기초학력 수준에서는 직선의 방정식 형태로 나타내지 않은 유형4의 경우가 많은 것으로 나타났다. 우수학력 수준의 학생들은 접선의 방정식을 구하는 데 어려움이 있고, 보통학력 수준의 학생들은 원의 접선의 방정식의 의미를 이해하지 못하는 학생들이 다수 있는 것으로 판단된다.

위와 같이 수와 연산과 기하 영역의 서답형 문항에 대한 오류 유형 분석을 토대로 교수·학

습의 시사점을 우수학력과 보통학력 이하 수준을 중심으로 정리하면 다음과 같다.

우선 우수학력 수준의 학생들에게 원의 접선의 방정식을 효과적으로 구하는 방법에 대한 교수·학습이 강화될 필요가 있다. 서답형 4_(2)와 서답형 4_(3)의 답안 유형 사이의 관계 분석 결과, 서답형 4_(2)을 바르게 해결한 학생 중 35.62%가 4_(3)을 해결한 것으로 나타났다. 우수학력 수준의 학생도 직선의 방정식은 구했지만 교점을 이용해 원의 접선의 방정식을 구하는 것을 어려워하는 학생이 많다는 것을 의미한다. 따라서 우수학력 수준 이하의 학생들이 다양한 문제 상황에서 원의 접선의 방정식을 효과적으로 구할 수 있는 교수·학습 방법을 모색해야 될 것이다.

다음은 보통학력 수준 이하 수준에 제공하는 교수·학습에 관련된 시사점을 정리한 것이다. 첫째, 조건, 조건의 부정, 진리집합, 명제와 같은 수학적 용어에 대한 의미를 분명하게 이해시킬 필요가 있다. 2_(1)과 2_(2)의 답안 내용 중 오류 유형이 나타난 배경을 살펴보면, 용어의 의미를 제대로 이해를 하지 못해 문제를 해결하지 못한 경우가 많은 것으로 판단된다. 따라서 수학적 용어의 의미를 가르칠 때는 관련된 풍부한 수학적인 예를 제공하여 용어에 대한 이해도를 제고할 필요가 있다.

둘째, 수와 연산 영역에서 조건과 명제를 다룰 때 집합과 연계하는 등과 같이 효과적으로 지도할 수 있는 방안을 모색할 필요가 있다. 서답형 2_(1)과 서답형 2_(2)의 답안 유형 사이의 관계 분석 결과, 서답형 2_(1)을 바르게 해결한 학생 중 21.12%가 2_(2)를 해결하지 못한 것으로 나타났다. 이 학생들은 조건의 부정의 의미는 알고 있었지만 명제가 참이 되는 조건을 이해하지 못한 경우이다. 따라서 명제가 참이 되는 조건의 의미를 진리집합의 포함관계를 이용하는 등과 같이 직관적으로 이해도를 제고할 수 있는 방안을 모색할 필요가 있다.

셋째, 일차함수 그래프에서 기울기가 의미하는 것이 무엇이고 어떻게 구하는 것인지에 대한 교수·학습의 보완이 필요하다. 서답형4_(1)의 답안 유형 분석 결과 보통학력 수준의 학생들은 두 점 사이의 기울기 같다는 것을 어느 정도 인지하고 있지만 기울기를 구하는 과정에서 오류가 많이 나타났고, 기초학력 수준 이하의 학생들은 두 점 사이의 기울기가 의미하는 것을 정확하게 인지하고 있지 못하는 것으로 나타났다. 따라서 함수를 나타내는 표, 대수식, 그래프를 적절하게 서로 연결하여 기울기의 의미와 기울기를 구하는 방법에 이해도를 제고할 필요가 있다.

넷째, 좌표평면 위의 두 점의 좌표가 주어졌을 때 직선의 방정식을 구하는 방법에 대한 이해도를 제고할 필요가 있다. 서답형 4_(1)과 서답형 4_(2)의 답안 유형 사이의 관계 분석 결과, 서답형 4_(1)을 바르게 해결한 학생 중 21.43%가 4_(2)를 해결하지 못한 것으로 나타났다. 즉 두 점 사이의 기울기가 같다는 것을 이용해 a의 값을 옳게 구한 학생 중 직선의 방정식을 옳게 구하지 못한 학생이 다소 있는 것으로 나타났다. 따라서 학생들에게 다양한 일차함수 그래프를 탐구할 수 있는 학습 기회의 제공은 물론 기울기와 y절편이 주어졌을 때, 두 점의 좌

표가 주어졌을 때 등의 조건을 이용하여 직선의 방정식을 구할 수 있는 방법에 대한 교수·학습 지원이 필요하다.

본 연구 결과를 토대로 수학의 교수·학습과 관련해서 다음과 같은 제언을 하고자 한다.

첫째, 교육과정에서 다루는 용어의 의미에 대한 교육을 강화할 필요가 있다. 학생들에게 수학적인 용어의 의미를 제대로 이해를 시키기 위해서는 용어의 의미를 단순하게 암기하게 하는 것이 아니라 그 용어가 가지는 수학적인 의미를 다양한 방법으로 제시하면서 용어에 대해 익숙하게 할 필요가 있다. 즉 학생들에게 용어의 의미에 대한 설명을 할 때에는 수학적인 다양한 예시를 함께 다루어 주는 세심한 지도가 필요하다.

둘째, 기하 영역에 관련된 내용을 다룰 때, 함수 영역의 내용과 연계를 지어 효과적으로 지도할 필요가 있다. 예를 들면, 중학교에서 배운 함수에 관한 수학적 지식은 고등학교 교육과정의 기하 영역에 해당하는 내용을 배울 때 반드시 알아야 될 내용이다. 연구의 결과에서도 제시한 것처럼 함수에 대한 기초적인 지식이 부족한 학생에게는 기하 영역의 원의 접선의 방정식 등과 같은 내용이 어려워 수학 학습에 대한 흥미가 떨어질 수 있다. 따라서 기하 영역의 어떤 내용을 다룰 때 함수 영역의 특정 내용의 숙달이 필요한 경우라면 선수학습이 제대로 되어 있는지에 대한 점검과 더불어 선수학습 능력이 부족한 학생에게는 그에 대한 적절한 교수·학습 조치가 필요하다.

셋째, 학생들이 문제를 해결할 때, 문제에서 제시하는 조건이 무엇인지에 대한 내용을 꼼꼼하게 점검하는 학습 습관을 길러줄 필요가 있다. 연구 결과에서도 2번 문항의 경우에는 전체집합이 자연수인데도 불구하고 답안을 작성할 때, 자연수를 쓰지 않은 경우가 많았고, 4번 문항의 경우에는 그림에서 제시한 그래프를 참고하면 a의 값이 양수이고, 기울기와 y절편도 양수인데도 불구하고 조건에 맞지 않는 답을 쓴 경우가 많았다. 이러한 결과는 정현도, 강신포, 김성준(2010)가 제시한 문항 이해의 오류와 개념 원리의 오류, 한경민, 고상숙(2014)이 제시한 잘못된 정의나 정리의 사용에 관한 오류 유형, 김래영, 이민희(2013b)이 제시한 문제에서 주어진 정보 이해의 오류와 관련이 있다. 따라서 문제해결과정에서 문제의 조건에 맞는 답을 구하고 있는지에 대해 학생스스로 점검하는 메타인지적인 사고 습관이 중요하다는 것을 강조할 필요가 있다.

넷째, 학생들이 오류를 범하기 쉬운 내용에 대해서는 서술형 평가와 같이 직접 문제해결 과정을 쓰도록 하여 학생들의 오류 유형을 구체적으로 파악할 필요가 있다. 본 연구는 단답형 문항을 중심으로 분석했기 때문에 학생들의 문제해결 유형을 성취수준별 정답률이나 답안 유형별 도수분포 및 비율 그래프를 통해 추론할 수밖에 없는 제한점이 있다. 하지만 학생들이 직접 작성한 문제해결 과정을 분석하는 것은 학생들뿐만 아니라 교사에게도 교수·학습의 보다 구체적인 피드백을 제공해 줄 수 있다.

참 고 문 헌

교육과학기술부(2011). **수학과 교육과정.** 교육과학기술부 고시 제 2011-361호 [별책 8].

교육부(2015). **수학과 교육과정.** 교육부 고시 제2015-74호 [별책 8].

교육부(2016). **2016년 교육부 업무계획.** 교육부 보도자료(2016.1.25.).

김경희, 김성숙, 시기자, 노은희, 김수진, 이인호, 신진아, 박인용, 구남욱, 김도남, 김완수, 구슬기, 김부미, 우석진(2014). **국가수준의 기초학력 점검을 위한 초등학교 학업성취도 평가 방안.** 한국교육과정평가원 연구보고 CRE 2014-2.

김동영, 조윤동, 이광상, 전영주(2013). **2012년 국가수준 학업성취도 평가 결과 분석 - 수학 -.** 한국교육과정평가원 연구보고 ORM 2013-37-3.

김래영, 이민희(2013a). 수학과 서술형 평가에 대한 중학교 교사들의 인식연구. **수학교육학연구, 23**(4), 533-551.

김래영, 이민희(2013b). 중학교 2학년 서술형 평가 문항 반응에서 나타난 오류 분석 : 대수 영역을 중심으로. **수학교육학연구, 23**(3), 389-406.

김민경, 노선숙, 주유리, 권점례, 김유진(2008). 초등학교 6학년 수학과 서술평 평가의 자료개발 연구. **한국학교수학회논문집, 11**(4), 543-567.

김민경, 조미경, 주유리(2012). 서술형 평가에 대한 인식 및 실태에 관한 조사연구. **한국초등수학교육학회지, 16**(1), 63-95.

김부미(2005). 경험적 구조주의에 의한 수학적 오류의 분류가능성 탐색. **수학교육학연구, 15**(4), 461-488.

김성규, 유윤재(2006). 고등학생을 위한 수학교과 서술형 평가 문항 자료 개발 및 적용. **과학교육연구지, 30,** 1-22.

김성희(2012). 서술형 평가에서 나타나는 오류 분석 및 채점기준 개선에 관한 연구-고등학교 함수의 극한과 연속성 영역을 중심으로. 석사학위 논문, 한국교원대학교.

노선숙, 김민경, 조성민, 백해진(2008a). 중학교 1학년 수학과 서술평 평가문항 개발 연구. **한국수학교육학회 수학교육, 47**(4), 487-503.

노선숙, 김민경, 조성민, 정연숙, 정윤아(2008b). 중등 수학과 서술형 평가의 현황 분석 연구. **한국학교수학회논문집, 11**(3), 377-397.

이광상, 조윤동(2014). 2010-2012년 국가수준 학업성취도 평가 결과에 나타난 중학교 수학과 성취수준별 학업성취 특성. **대한수학교육학회지 학교수학, 16**(2), 237-257.

이광상, 조윤동(2015). **고등학교 수학과 서답형 문항에 대한 학생 반응 분석.** 한국교육과정평가원(편). 국가수준 학업성취도 평가의 서답형 문항에 대한 학생 반응 분석(98-122).

한국교육과정평가원 연구자료 ORM 2015-76.

이선비, 김구연, 노선숙, 김민경, 김래영(2014). 수학교사들의 서술형·논술형 평가에 대한 인식 및 실행 조사. **한국학교수학회논문집, 17**(2), 275-290.

이인호, 김경주, 이상일, 이정우, 서민철, 조윤동, 이광상, 김현경, 배주경, 황필아, 심재호, 이기영, 이봉우, 정기문(2014). **답지 반응률 분포 곡선을 활용한 중학교 3학년 교과별 학업성취 특성 심층 분석.** 한국교육과정평가원 연구보고 RRE 2014-5-2.

이인호, 이상일, 김승현, 이정우, 서민철, 조윤동, 이광상, 김현경, 동효관, 배주경, 김성혜, 권경필, 이규호, 정기문(2015). **국가수준 학업성취도 평가의 서답형 문항 심층 분석.** 한국교육과정평가원 연구보고 RRE 2015-12-2.

이인호, 조윤동, 이광상(2014). **2013년 국가수준 학업성취도 평가 결과 분석 - 수학 -.** 한국교육과정평가원 연구보고 ORM 2013-37-3.

이인호, 조윤동, 이광상(2015). **2014년 국가수준 학업성취도 평가 결과 분석 - 수학 -.** 한국교육과정평가원 연구자료 ORM 2015-45-3.

정현도, 강신포, 김성준(2010). 초등수학 서술형 평가에서 나타나는 오류 유형 분석. **한국초등수학교육학회지, 14**(3), 885-905.

조윤동, 고호경(2015). 문자와 식, 함수 영역에서 보이는 중학생의 수학적 오류 분석. **수학교육학연구, 25**(3), 281-302.

조윤동, 이광상(2014). 2010-2012년 국가수준 학업성취도 평가에서 나타난 초등학교 성취수준별 학업 특성. **한국수학교육학회지 시리즈 A, 53**(2), 219-237.

조윤동, 이광상(2015). 학업성취도 평가에서 답지 반응률 분포 그래프를 활용한 중학생의 수학과 학업 특성 분석. **대한수학교육학회지 수학교육학연구, 25**(1).

조윤동, 조성민, 최인선, 김미경(2012). **2011년 국가수준 학업성취도 평가 결과 분석 - 수학 -.** 한국교육과정평가원 연구보고 RRE 2012-2-3.

한경민, 고상숙(2014). 원의 방정식의 서술형 평가에서 오류유형 분석. **학교수학, 53**(4), 509-524.

Ashlock, R. B.(2002). *Error patterns in computation: using patterns to Improve instruction(8th ed.)*. Merrill Prentice Hall.

Fischbein, E.(1997). The evolution with age og probabilistic intuitively based misconception. *Journal for Research in Mathematics Education, 28*(1), 96-105.

Radatz, H.(1979). Error analysis in mathematics education. *Journal for Research in Mathematics Education, 10*, 163-172.

Resnick, L. B., Nesher, P., Leonard, F., Magone, M., Omanson, S., & Peled, I.(1989). Conceptual basis of arithmetic errors: the case of decimal fractions. *Journal for*

Research in Mathematics Education, 20, 8-27.

Sfard, A.(1991). On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects an different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics, 22*, 1-36.

Vinner, S.(1983). Concept definition, concept image and the notion of function. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 14*(3), 293-305.

· 논문접수 : 2016.07.05. / 수정본접수 : 2016.08.01. / 게재승인 : 2016.08.16.

ABSTRACT

Analysis of Student Responses to Constructed Response Items of High School Mathematics in the National Assessment of Educational Achievement from 2014

Kwang-Sang Lee
Research Fellow, Korea Institute for Curriculum and Evaluation

The present study aims at analyzing students' responses to constructed response items in order to obtain detailed information on academic achievement and to draw suggestions for enhancing curriculum and instruction. The data is compiled of students' responses to constructed response items on the National Assessment of Educational Achievement (NAEA) from 2014. Students' responses were categorized according to type and characteristics were analyzed in relation to NAEA scores.

The analysis results of students' responses to constructed response items in high school Mathematics can be summarized as follows. First, students at below Proficient level need to clearly understand the meanings of mathematical terms including condition, negation of condition, truth set, and proposition. Therefore, various mathematical examples should be provided when introducing the meanings of the terms. Second, an effective teaching method of linking the condition and proposition with the set should be sought, and teaching and learning methods for improving students' understanding of the meaning of slopes in graphs of linear function should be supplemented. Third, the teaching and learning methods need to be enhanced for students to understand how to form the equation for the linear line when given two coordinates on a coordinate plane and how to effectively form equations of a tangent line on a circle. In particular, when teaching Geometry, teachers need to effectively teach students by linking it with function. Fourth, when students solve problems, they should be taught to take the meta-cognitive approach by carefully checking the conditions suggested in the question.

Key Words : National Assessment of Educational Achievement(NAEA), Constructed Response Items, Achievement level, Analysis of Student Responses