교육과정평가연구
The Journal of Curriculum and Evaluation
2009, Vol. 12, No. 3, pp. 275～293

Birkhoff 공리계의 교수학적 분석[1)]

권 석 일(경인교육대학교 전임강사)

≪ 요 약 ≫

현 학교수학의 기본적인 가정 중 하나는 학교수학에서 다루는 기하적 양에 대하여 언제나 유일한 실수를 대응시킬 수 있으며, 기하적 양 사이의 비례관계에 그 각각의 양에 대응되는 실수의 비례관계를 대응시킬 수 있다는 것이다. 이 논문은 이와 같은 기하적 양과 실수 사이의 연결성에 대한 교수학적 분석을 목적으로 한다. 이를 위하여 실수 체계의 성질을 기본 가정으로 삼고 선분의 길이와 각의 크기에 대한 공준을 통하여 기하적 양과 실수를 연결하는 Birkhoff의 공리계를 살펴보고, 그 공리계가 구현된 교과서와 현행 교과서를 비교하여 분석한다. 이러한 분석은 Birkhoff의 공리계를 바탕에 두고 구성한 교과서가 그 구체적인 진술 양상에 있어서는 차이를 보일 수 있다는 것을 보여준다. 이러한 진술 방식의 차이에는 논리적으로는 생략 가능한 가정일지라도 교수학적 고려에 의하여 수학적인 아름다움을 일부 희생할 수 있다는 학교수학의 기본철학이 숨어있다.

주제어 : 교수학적 분석, Birkhoff, 공리계, 연결성, 기하적 양

Ⅰ. 서론

현 학교수학의 기본 가정 중 하나는 기하적 양에 대하여 언제나 유일한 실수를 대응시킬 수 있으며, 기하적 양 사이의 비례관계에 그 각각의 양에 대응되는 실수의 비례관계를 대응시킬 수 있다는 것이다. 학교수학에서 이러한 가정을 사용한다는 증거는 쉽게 찾을 수 있다. 이를테면, 현 학교수학의 중요한 내용 중 하나인 데카르트 평면은 이러한 가정이 존재한다고 생각하지 않으면 설명하기 어렵다.

수학적 아이디어 사이의 '연결성(Connections)'을 이해하는 것은 대단히 중요하다. NCTM(2000, pp. 64-66)은 학교수학의 원리와 규준 중 하나로 '연결성'을 제시하면서, 학생들이 전 학년에 걸쳐 수학적 아이디어 사이의 연결성을 자각하고 사용할 수 있도록 하여야 하

1) 이 논문은 2008년도 경인교육대학교 학술연구비의 지원에 의한 것임

며, 수학적인 아이디어가 어떻게 서로 관련을 맺어 하나의 일관성 있는 전체를 이루는지 이해하여야 한다고 강조한 바 있다. 이러한 관점에서 볼 때 기하적 양과 실수의 연결성을 이해하는 것은 큰 의미를 가진다고 할 수 있다.

기하적 양과 실수의 연결성은 다양한 층위에서 이해될 수 있다. 양과 수는 그리스 시대에서부터 계속 연구되어온 주제이므로, 양과 수의 연결성의 역사적 변천 과정 속에서 기하적 양과 실수가 어떻게 연결되는 지를 살펴보는 것이 그 이해의 한 가지 층위가 될 수 있으며, 다양한 교재의 분석을 통하여 기하적 양과 실수의 연결성을 살펴보는 것도 그 한 가지 층위가 될 수 있을 것이다. 또한 나아가서, 기하적 양과 실수를 연결하는 가장 수학적인 방법, 공리 체계를 분석하는 것 역시 그 이해의 한 가지 층위가 될 수 있을 것이다. 우정호 등(2006, p. 66)은 교수학적 분석을 "학교수학의 내용을 이루고 있는 개개의 지식의 본질을 다양한 측면에서 밝히는 작업"이라고 말하고 있는 바, 위에서 제시한 이해 방식은 일종의 교수학적 분석으로 볼 수 있다.

이 논문은 기하적 양과 실수 사이의 연결성에 대한 교수학적 분석을 목적으로 한다. 이를 위하여 선분의 길이와 각의 크기에 대한 공준을 통하여 기하적 양과 실수를 연결하는 Birkhoff의 공리계를 그 주요 분석 대상으로 한다. Birkhoff의 공리계를 분석 대상으로 한 이유는, Birkhoff 공리계가 실수 개념을 상식으로 수용하는 방식, 곧 실수를 기하적 양과 연결시키는 현대적인 수학교재의 바탕이 되기 때문이다. Birkhoff는 1932년 저명한 수학저널인 《the Annals of Mathematics》 제33호에 "자와 각도기에 기반한 평면 기하의 공리계(A set of postulates for plane geometry, based on scale and protractor)"를 게재하여 엄밀하게 정의된 실수 개념을 상식으로 수용하는 현대수학적인 평면 기하 공리계를 제안하였다. 이어서 그는 1959년 Beatley와 더불어 《기본 기하학(Basic Geometry)》을 출판하여 자신이 제안한 공리계를 기반으로 하는 중등학교 기하교재를 제시하였다. 그가 제안한 방식은 수의 기초 위에서 기하에 접근하는 방식으로 볼 수 있으며, 이는 고대 피타고라스의 접근 방법에 대한 현대적 입장이라고도 볼 수 있다. 최영기, 이지현(2007)은 피타고라스와 Birkhoff의 접근 방법을 '산술적 접근'으로, 유클리드와 Hilbert의 접근 방법을 '기하학적 접근'이라고 각각 묶어 설명하면서 이 두 가지 입장을 대조하고 있다. 이 두 가지 입장의 가장 큰 차이는 실수 개념에의 의존도에 있다. Birkhoff와 Beatley(1959)는 실수의 성질에 대한 공리를 가정하고 출발하고 있는 반면, Hilbert 공리계에서는 실수의 성질에 대한 공리 없이 직선의 연속성에 대한 Dedekind 공리가 등장한다(Cederberg, 1989, pp. 205-213). 그런데, Hilbert의 접근 방법은, SMSG(1960) 기하교과서의 서문에서 말하고 있듯이 기하에 대한 학교수학의 접근 방법이 되기에는 그 학문적 수준이 너무 높다. SMSG 기하교과서에서는 Birkhoff식 접근의 장점으로, 첫째 공준을 다루는 것이 훨씬 쉬워지고, 수학적 정확성과 알기 쉬움 양자를 추구할 수 있다는 점, 둘째 기하와 대수를 연결시켜 양자를 보다 본질적으로 이해하게 한다는 점을 들고 있다. 목하 살

펴보겠으나 현재 우리나라 교과서는 상당한 정도로 Birkhoff식 접근을 사용하고 있으며 이는 SMSG 기하교과서가 추구한 목적을 일부 공유하는 바 있다고 할 수 있다.

이 논문에서는, 기하적 양과 실수 사이의 연결성에 대한 교수학적 분석을 위하여, 먼저 역사적인 관점에서 수와 양의 연결성을 고찰하고, Birkhoff 공리계를 토대로 설계된 기하교과서를 분석하고, 이를 다시 우리나라 교과서와 비교함으로써, 수와 양이라는 학교수학의 근본적인 주제의 본질을 다양한 측면에서 드러내고자 한다.

Ⅱ. 수와 양의 연결성에 대한 역사적 고찰

1. 고전적 수와 양

잘 알려진 바와 같이 유클리드《원론》에는 선분의 ‘길이’에 해당하는 개념은 물론이거니와 기하적 대상의 측정값에 대한 어떠한 개념도 없다(Heath, 1956). 물론, 두 선분이 수직으로 만나 만들어지는 직사각형 등을 현대적인 관점에서, 두 선분의 길이의 곱으로 해석할 수는 있으나 유클리드《원론》어디에도 선분 사이의 ‘연산’은 정의되지 않는다(Heath, 1956). 유클리드《원론》이 이와 같은 접근방법을 사용하게 된 이유 중 하나는 통약 불가능 양에 대한 수치적 접근이 가지는 논리적 결함을 해결할 수 있는 수(數)개념을 그리스 수학자들이 가지고 있지 못하였기 때문이다. 통약 불가능 양에 대한 그리스 인의 접근 방식을 살펴보기 위해서는 먼저, 피타고라스의 정리에 대하여 살펴볼 필요가 있다.

Gould(1957, p. 274)는 피타고라스가 ‘피타고라스의 정리’를 증명한 방법을 소개하면서, 그 방법이 직각삼각형의 닮음을 이용한 증명임을 밝혔다. Gould(1957, pp. 274-276)는 이 증명이 “같은 높이를 가지는 삼각형(의 넓이)은 그 밑변(의 길이)에 비례한다”는 유클리드《원론》제VI권 명제 1에 의존하고 있음을 밝혀내고, 피타고라스가 이 제VI권 명제 1을 통약 가능한 경우에만 해당되는 자신의 비례 개념을 사용하여 증명하는 오류를 범하였음을 밝혔다. 피타고라스의 비례 개념은 ‘통약 가능한’ 경우에만 해당되는 정의로서, “정수 m과 n이 있어, $a=\frac{m}{n}b$ 이고 $c=\frac{m}{n}d$ 일 때 $a : b=c : d$라고 한다”는 것이다. 이 개념을 사용하여 “같은 높이를 가지는 삼각형(의 넓이)은 그 밑변(의 길이)에 비례한다”는 명제를 증명할 때, 밑변의 공통측도가 존재함을 가정하게 된다. 그러나 이것은 임의의 두 양(임의의 두 실수)의 비의 값을 유리수라고 가정한 것이므로, 즉 두 양이 무리수를 그 비의 값으로 가지는 경우를 설명할 수 없으므로 타당하지 않다.

그리스 수학자들은 직각이등변삼각형의 한 변과 그 빗변 사이에 공통측도가 없다는 발견

으로 인해 큰 혼란을 겪었으며, 그 결과 통약 불가능한 양을 처리하기 위한 방법론을 개발하고자 노력하였고 그 결과가 에우독소스(Eudoxus)의 비례론이다(Eves, 1995, pp. 67-71). 유클리드《원론》제V권은 에우독소스의 비례론을 다루고 있으며, 이 이론은 이후 현대적인 실수론의 기초를 제공해 주었다(Eves, 1995, p. 127). 이 비례론 중 위에서 제시한 피타고라스의 그것과 대비되는 것이 바로 유클리드《원론》제V권의 정의 (4), (5)이며, 이는[2] 다음과 같다.

> (4) 두 量 a와 b가 서로에게 比를 갖는다는 것은, $a<b$인 경우 적당한 N이 존재하여 $Na>b$인 것이다.
> (5) 量의 比 $a:b$ 가 $c:d$ 와 같다는 것은, 임의의 정수 M과 N에 대하여 $Ma>Nb$이면 그리고 그때에만 $Mc>Nd$, $Ma=Nb$이면 그리고 그때에만 $Mc=Nd$, $Ma<Nb$이면 그리고 그때에만 $Mc<Nd$가 성립한다는 것이다. (Heath, 1956)

이 정의는 오늘날의 관점에서 본다면 임의의 수를 그 수보다 큰 유리수나 작은 유리수들을 이용하여 설명하는 것이다. 이를테면, “$Ma>Nb$이면 그리고 그때에만 $Mc>Nd$이다”라는 식은 “$\frac{a}{b}>\frac{N}{M}$이면 그리고 그때에만 $\frac{c}{d}>\frac{N}{M}$이다”로 변환할 수 있는데 이것은 두 수 $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$가 같다는 것을 그 각각의 수보다 작은 유리수 전체의 집합이 같다는 것으로 설명하려는 아이디어이다.

그러나 그리스 수학은 실수계의 기초를 제공할 만큼의 업적을 남겼음에도 불구하고 무리수를 수로서 명시적으로 다루지 않는 입장을 고수함으로써 수학이 확장되면 확장될수록 그 증명이 더욱더 복잡해지는 부작용을 낳았다(Kline, 1972, p. 173). 또한 그리스적 전통은 여러 가지 교육적 어려움의 원천이 되었고 18-19세기에 이르러 수많은 학자들에 의하여 극복이 시도되었다(Cajori, 1910). 다음에서 살펴볼 수 있듯이 기하 양 사이의 비례관계를 다루는 유클리드식의 방법이 기하교재에서 사라지기까지는 많은 시간이 필요했다.

2. 르네상스 시대의 수와 양

16-17세기에 이르러 고전적 수(number)와 양(magnitude)의 개념에 대하여 큰 변화가 일어나 연속적이면서 측정가능한 양이라는 개념이 생겨났다. 이와 같은 변화가 언제, 어떻게 일어났는지 명확하게 알 수 있는 자료는 대단히 찾기 어렵지만, 양을 자연스럽게 그 수량적 측정값을 통해서 다룸으로써 수와 양의 고전적인 개념을 매우 가깝게 융합한 중세 아라비아 수학의 영향이 컸을 것으로 짐작할 수는 있다. 이러한 근본적인 관점 전환은, 학문적으로 이루어지거나 타당한 토대 위에서 이루어지지는 않았다. 사실상 원론의 중세 라틴판에서는 이러

2) 이 정의는 필자가 현대적인 용어를 사용하여 재구성한 것이다.

한 관점을 거의 찾아볼 수 없으며, 이러한 관점 전환은 abacus 학교 등에서 다룬 응용수학을 통하여 이루어졌다(Malet, 2006).

르네상스 시기에 일어난 양과 수에 대한 관점 변화를 가장 분명하게 보여주는 것은 Stevin이다. Stevin은 일반적인 수 체계에 소수를 도입하였다(Sarton, 1935). Stevin은 '소수는 모든 계산과 측정이 분수없이 완벽해질 수 있는 산술의 종류'(Sarton, 1935)라고 말하고 있다. Stevin의 관점은 가능한 모든 측정(값)과 수를 동일시하는 데에서 출발한다. 이렇게 되면 수는 근본적으로 양의 본성을 가지게 된다. 바로 이러한 관점이 1이 수가 아니라 근본 원리, 즉 원천이 된다는 오래된 신념을 공격하는 Stevin의 논증의 핵심이다(Malet, 2006). 그러나 이상과 같은 관점 변화에도 불구하고 무리수를 명시적으로 다루지 않고 기하적인 논증을 고수하는 유클리드식의 접근방법은 수학교과서에서 여전히 그 위치를 확고하게 하고 있었다(Stamper, 1909).

3. Descartes에서 Weierstrass까지

Lakoff와 Núñez(1997, pp. 48-51)는 데카르트 평면에 대한 은유적 구조에 대하여 논의하면서 데카르트 평면에 '산술은 기하이다'라는 은유가 들어있어 이 은유를 통하여 산술과 기하가 연결됨을 지적한 바 있다. Descartes의 아이디어가 현대수학의 중요한 도구 중 하나인 직교좌표계의 근원임은 주지의 사실이다. 그러나, 데카르트 평면에 대한 아이디어가 등장한 이후에도 유클리드식의 접근방법은 완전히 사라지지 않았다. D'Alembert는 1784경 기하학 원론이 갖추어야 할 덕목이 과학의 발견자가 밟았을 경로에 따라, 진리 사이의 자연스러운 관계를 알 수 있도록, 주제를 전개하여야 한다고 주장하면서도 통약 불가능한 관계는 반드시, 어떤 비가 다른 어떤 비에 대하여 클 수도 작을 수도 없다면 일치하여야만 한다는 간접증명법을 통해서만 다루어져야 한다고 말하고 있다(Cajori, 1910). 유클리드를 훌륭하게 개선한 것으로 평가받는 Lacroix, Legendre의 기하교재 역시 통약 불가능한 양 사이의 관계에 대해서는 간접증명법을 사용하고 있다(Cajori, 1910; Legendre, 1866).

통약 불가능한 양 사이의 관계를 효과적으로 설명하는 도구를 만들고자 노력한 학자 중에 De Morgan을 빼놓을 수 없다. De Morgan(1836/2007)은 1836년에 《The Connexion of Number and Magnitude; An attempt to explain the fifth book of Euclid》를 출판하였다. 이 책에서 그는 당시 한참 완성되어 가던 대수적인 체계를 사용하여 기하 양 사이의 비례관계로 설명하고 이를 수와 연결시키고자 노력하였다(De Morgan, 1836/2007). 그러나 De Morgan(1836/2007, p. iv)은 양 자체와 수 표현을 구분하고 있으며, 책 전체를 통하여 유클리드의 증명을 새로운 기호체계를 이용하여 새롭게 표현하는 데에 주력하고 있다. 이는 실수를 바탕에 두고 기하를 설명하기보다는 유클리드의 비례론 자체를 대수적인 기호체계를 이용하여 보다 쉽게 설

명하려는 시도로 보아야 할 것이다.

오늘날과 같은 실수론이 완성되어 실수를 이론적이고 체계적으로 설명할 수 있게 된 것은 Weierstrass에 이르러서 이다. 극한과 연속에 대한 Weierstrass의 연구는 미적분학을 수와 산술적 관계로 환원하는 것이다. 이것은 미적분학에서, 산술 밖에 있다고 간주되는 모든 개념을 완전히 제거하려한 것이다(Lakoff와 Núñez, 1997, pp. 67-82). 이 시점에 이르러 수학자들은 유클리드 기하학도 해석적 표현을 통하여 실수에 기초를 둘 수 있다는 것을 보였다(Eves, 1995, p. 517).

이와 같이 유클리드에서 19세기에 이르는 기나긴 시간 동안 수학 자체에서나 수학교과서에서나 실수의 기초 위에서 기하적 양을 설명하는 오늘날과 같은 방식은 쉽게 찾아보기 어렵다. 수학 자체를 살펴보더라도 기하학을 실수에 기초를 두고 설명할 수 있게 된 것은 19세기에 이르러서야 가능하게 되었으며, 수학교과서에서 이러한 관점을 본격적으로 채택한 경우는 19세기에도 찾아보기 어려웠다.

Ⅲ. Birkhoff 공리계에 따른 기하교과서 분석:《기본 기하학》과 SMSG 기하교과서를 중심으로

서론에서 밝힌 바와 같이 Birkhoff는 엄밀하게 정의된 실수 개념을 상식으로 수용하는 현대수학적인 평면 기하 공리계를 제안하고, 자신이 제안한 공리계를 기반으로 하는 중등학교 기하교재를 제시하였다.

이 장에서는 Birkhoff의 공리계를 바탕으로 한 교재 두 가지,《기본 기하학》과 SMSG 기하교과서를 분석함으로써, 첫째 이러한 교재가 어떠한 의도를 가지고 저술되었는가를 살펴보고, 둘째, 이 교재들이 오늘날의 교재와 구체적으로 어떠한 점에서 일치하며, 어떠한 점에서 다른가를 검토하고자 한다.

1. Birkhoff의《기본 기하학》

가. 기본 취지

이 항에서는 Birkhoff와 Beatley(1959)의《기본 기하학》서문을 바탕으로 Birkhoff가 실수(의 기본성질)를 가정한 기하를 제안한 기본 취지를 정리하면서 앞으로의 교과서 분석에서 다루어질 몇 가지 논점을 정리한다. 이는 다음과 같다.

첫째, 논증 기하에 대한 고전적인 접근 방법은 초보자가 증명 없이 받아들이기를 열망하

는 기본 가정, 공준, 직관적으로 확실한 정리를 연역적인 방법을 통하여 배우도록 하고 있는데 이러한 접근 방식을 극복하고자 하는 것이 Birkhoff의 기본 취지 중 하나이다.

둘째, 실수를 받아들임으로써, 특히 무리수를 받아들임으로써 '통약 불가능한 경우'를 별도의 언급 없이 다룰 수 있게 된다. 여기서 한 가지 현재의 학교수학과 크게 차이가 나는 부분이 생겨나게 된다. 수의 기본 성질을 받아들인다는 측면에서는 현재의 학교수학과 대동소이하지만, Birkhoff는 특히 비례 상수가 1인 특수한 경우에 등호가 성립하는 것으로 간주하여 일반적인 문장으로 '같은 삼각형'과 '닮은 삼각형'이라는 아이디어를 하나로 결합할 수 있다고 보고, 삼각형의 합동에 대해서는 별도의 공리를 제시하지 않았다. 이에 대해서는 다음 항에서 자세히 논의하기로 한다.

셋째, 단순화와 압축화를 추구하였다. 그 결과 다섯 가지의 기본 공준, 일곱 가지 기본 정리, 열아홉 가지의 정리, 일곱 가지의 자취 문제만을 가지고 평면 기하를 구축하였다. 이때, Birkhoff는 다섯 가지 기본 가정 중에서 세 가지에서 실수 체계와 공조함으로써 심오한 깊이와 힘을 가지게 된다고 보았다. Birkhoff는 이러한 방식으로 구축된 기하가 간결하고 옹골차며, 잠재적인 힘을 가지고 있다는 점에서 자신의 접근 방식에 따른 기하학을 '기본 기하학'이라고 부르고 있다. 그런데 이 방식에 따르면 현재 교과서의 명제 진술 순서와는 매우 다른 양상을 띠게 되는데 이 역시 다음 항에서 다루도록 하겠다.

넷째, 초심자가 기본 가정에서 연역될 수 있는 기본 정리 중 일부를 기본 가정으로서 받아들이도록 용인한다. Birkhoff는 자신의 기하교재에서 기본 명제 13번으로 다루고 있는 "주어진 직선 위에 있지 않은 점이 주어졌을 때 그 점을 지나면서 주어진 직선과 만나지 않는 직선은 반드시 그리고 하나만 존재한다."가 자신의 교재의 기본 가정으로부터 연역될 수 있지만, 학생들에게는 증명 없이도 충분히 분명해 보일 것이기 때문에 학생들이 그 정리들을 처음부터 가정하는 것을 용인하여 주는 것이 현명할 것이며, 기하학의 정신을 충분히 이해하고 가정의 목록을 최소화하는 문제에 흥미를 가질 수준에 이르렀을 때, 이러한 정리를 다시 다루면 될 것이라고 말하고 있다.

나.《기본 기하학》의 특징

우선, Birkhoff와 Beatley(1959)의《기본 기하학》에서 실수와 기하적 양을 연결시켜주는 공리 및 그와 관련된 정의는 다음과 같다.《기본 기하학》은 평면기하를 다루고 있으므로, 여기서의 기하적 양은 길이, 각도, 넓이이다. 그러므로 여기서는 이 세 가지 양을 다루는 공리와 더불어 평면도형의 기본이 되는 삼각형의 닮음에 대한 공리와 관련 정의를 제시한다.

무정의 원소와 무정의 관계.

(a) 점, A, B, ⋯

(b) 점들의 집합은 직선이라 한다. $m, n, \cdots$
(c) 임의의 두 점 사이의 거리: $\mathrm{d(A, B)}$, $\mathrm{d(A, B) = d(B, A)}$인 음수가 아닌 실수
(d) 세 개의 순서있는 점 A, O, B ($\mathrm{A \neq O}$, $\mathrm{B \neq O}$)으로 이루어진 각: $\angle \mathrm{AOB}$, 실수 (법 2π). 점 O는 각의 꼭짓점이라 한다.

공준 Ⅰ(직선 측정 공리). 임의의 직선 m 위의 점 $\mathrm{A, B}, \cdots$은 모든 점 $\mathrm{A, B}$에 대하여 $|x_{\mathrm{B}} - x_{\mathrm{A}}| = d(\mathrm{A, B})$인 실수 x와 일대일대응 시킬 수 있다.

공리 Ⅲ(각 측정 공리). 임의의 점 O를 지나는 반직선 $m, n, \cdots$는 $\mathrm{A \neq O}$와 $\mathrm{B \neq O}$가 각각 m과 n의 점일 때, 차 $a_n - a_m \pmod{2\pi} = \angle \mathrm{AOB}$인 실수 $a \pmod{2\pi}$와 일대일대응 시킬 수 있다. 게다가 n 위의 점 B가 꼭짓점 O를 포함하지 않는 직선 r에서 연속적으로 변한다면 수 a_n 또한 연속적으로 변한다.

정의. $\angle m\mathrm{O}n \equiv \pi$이면 O를 지나는 두 반직선 m, n은 평각을 이룬다고 한다. $\angle m\mathrm{O}n \equiv \pm \pi/2$이면 O를 지나는 두 반직선 m, n은 직각을 이룬다고 하고, 이 경우에 n은 m과 수직이라고 한다.

공리 Ⅳ(닮음 공리). 두 삼각형 $\triangle \mathrm{ABC}$, $\triangle \mathrm{A'B'C'}$에서 어떤 상수 $k > 0$에 대하여 $d(\mathrm{A', B'}) = kd(\mathrm{A, B})$, $d(\mathrm{A', C'}) = kd(\mathrm{A, C})$, $\angle \mathrm{B'A'C'} = \pm \angle \mathrm{BAC}$이면, $d(\mathrm{B', C'}) = kd(\mathrm{B, C})$이고 $\angle \mathrm{C'B'A'} = \pm \angle \mathrm{CBA}$, $\angle \mathrm{A'C'B'} = \pm \angle \mathrm{ACB}$이다.

정의. 두 도형 사이에 모든 대응 거리가 비례하고 대응각이 모두 같거나 각각의 음수가 되는 일대일 대응이 있다면 임의의 두 기하학적 도형은 닮음이다. 두 도형이 $k = 1$로 닮음이면 임의의 두 기하학적 도형은 합동이다.

넓이 가정 1.
모든 다각형은 넓이라고 불리는, 다음의 성질을 가지는 수를 가진다.
(a) 합동인 다각형은 같은 넓이를 가진다.
(b) 다각형의 넓이는 그 구성 다각형의 넓이의 합과 같다.

정의 단위 정사각형의 넓이는 1로 한다.

넓이 가정 2.
직사각형의 넓이는 그 너비와 높이의 곱과 같다.

이와 더불어 산술에 대한 공리들이 가정된다.

이상과 같은 전개방식의 특징은 첫째, 공리를 모두 명시적으로 드러낸다는 점이다. 다음 장에서 살펴보겠으나 현재의 수학교과서는 공리라는 말을 사용하지 않고 공리를 제시하거나

필요에 따라서는 생략하는 방식을 따르고 있다.

둘째, 기하적 양과 실수를 연결한다는 철학을 철저하게 따름으로써 '닮음'과 '합동'을 하나의 틀로 설명한다. 《기본 기하학》에서는 '닮음 공리'만 제시되고 있을 뿐 SAS 합동 등에 대한 공리가 없다. 두 삼각형이 닮았을 경우, 대응되는 변의 길이 사이에 상수배 관계, 즉 '$d(\mathrm{A}', \mathrm{B}') = kd(\mathrm{A}, \mathrm{B})$'가 성립하게 되는데 이때 $k=1$인 경우가 곧 합동인 경우가 된다. 이는 현재의 교과서와 다르며, SMSG 교과서와도 다르다(다음 절 및 다음 장 참조).

셋째, 실수와 기하적 양을 연결시키는 동시에 실수의 기본 성질을 받아들임으로써 기하적 양에 대하여 연산을 정의하고 사용할 수 있게 된다. 이는 SMSG 교과서 및 현재의 교과서와 동일하다

마지막으로, 《기본 기하학》에서는 실수와 기하적 양을 긴밀하게 연결시켜 공준으로 도입한 후 기하 교과서를 기술하면서 소위 '평행선 공리', "주어진 직선 위에 있지 않은 점이 주어졌을 때 그 점을 지나면서 주어진 직선과 만나지 않는 직선은 반드시 그리고 하나만 존재한다."를 '피타고라스 정리'(정리 12)에 이어 정리 13으로 위치시킨 후 증명하고 있다. 이는 평행선 공리를 공리 중 하나로 받아들이는 SMSG 교과서와도 다르며, 평행선 공리와 논리적으로 동치인 '두 직선이 평행하면 엇각의 크기가 같다'를 가정하고 있는 현재 학교수학의 교과서(권석일, 2006, p. 94)와도 다르다.

2. SMSG 기하교과서

가. 기본 취지

이 항에서는 SMSG(1960)의 기하교과서의 기본 취지를 그 서문에 비추어 정리한다.

SMSG는 기하교과서의 서문에서 자신들이 채택하고 있는 공리계의 기본 틀이 Birkhoff 공리계를 따르고 있다는 점을 밝히고 있다. 더불어 다음과 같은 목적을 가지고 있다고 말하고 있다.

첫째, 실수를 가정하여 이를 출발점으로 삼아 수학적 정확성과 알기 쉬움을 동시에 추구한다.

둘째, 모든 합당한 경우에 있어서 기하와 대수를 연결시키게 되고, 이로부터 이 둘 중 하나의 지식이 자연스럽게 두 분야의 이해에 대한 본질적인 이해를 가져오게 한다.

나. SMSG 기하교과서의 특징

우선 SMSG(1960)의 기하교과서의 공리계 중 길이, 각도, 넓이를 실수에 연결시키는 공리, 삼각형의 합동, 닮음, 평행선 공리를 정리한다. 길이, 각도, 넓이를 실수에 연결시키는 공리

를 제시한 이유는 이 세 가지 기하적 양이 평면기하의 대표적인 양이기 때문이며, 나머지 공리들은 앞 절에서 분석한《기본 기하학》의 특징을 SMSG 기하교과서와 상호비교하기 위하여 제시한다. 단, 제시된 공리의 번호는 원전의 번호를 그대로 따른다.

무정의 용어 : 점, 선, 평면

공리 2. (거리 공리). 모든 서로 다른 한 쌍의 점에 대해서 유일한 양수가 대응된다.
공리 3. (자(Ruler) 공리). 한 직선의 점은 다음과 같은 방법으로 실수와 대응되도록 위치시킬 수 있다.
(i) 직선의 모든 점에 대해서 정확히 하나의 실수가 대응된다.
(ii) 모든 실수에 대해서 직선 위의 오직 한 점만 대응된다.
(iii) 두 점 사이의 거리는 대응되는 실수의 차의 절대값과 같다.
공리 4. (자 배치(Ruler placement) 공리). 한 직선의 주어진 두 점 P, Q에 대해서 P의 좌표는 0이고 Q의 좌표는 양수가 되도록 하는 좌표계를 선택할 수 있다.

공리 11. (각 측정 공리). 모든 각 $\angle \mathrm{BAC}$에 대하여 0과 180사이의 한 실수가 대응된다.
공리 12. (각 작도 공리). $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$를 반평면(half-plane) H의 모서리 위에 있는 반직선이라 하자. 0과 180 사이의 모든 수 r에 대하여 P가 H에 속하고 $m\angle \mathrm{PAB}=r$가 되는 반직선 $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$는 정확히 하나 존재한다.
공리 13. (각의 합 공리). D가 $\angle \mathrm{BAC}$의 내부의 한 점이면 $m\angle \mathrm{BAC}=m\angle \mathrm{BAD}+m\angle \mathrm{DAC}$가 성립한다.
공리 15. (SAS 공리). 두 삼각형(또는 한 삼각형과 그 자신) 사이에 대응이 주어졌을 때, 첫 번째 삼각형의 두 변과 끼인각이 두 번째 삼각형의 대응되는 것들과 합동이면 그 대응은 합동이다.
공리 16. (평행 공리). 외부에 주어진 한 점을 지나면서 주어진 직선과 평행한 직선은 기껏해야 한 개 존재한다.
공리 17. 모든 다각형 영역에 대하여 유일한 양수가 대응된다.
공리 18. 두 삼각형이 합동이면 그 삼각형의 영역은 같은 넓이를 가진다.
공리 19. 영역 R이 두 영역 R_1과 R_2의 합이라고 하자. R_1과 R_2가 기껏해야 유한개의 직선과 점에서 만난다고 가정하자. 그러면 R의 넓이는 R_1과 R_2의 넓이의 합이 된다.
공리 20. 직사각형의 넓이는 직사각형의 밑변의 길이와 높이의 길이의 곱이다.

이상과 같은 전개방식의 특징은 첫째, 공리를 모두 명시적으로 드러낸다는 점이다. 이는《기본 기하학》과 같다.

둘째,《기본 기하학》과 달리 합동 공리(공리 15)를 제시하고 있다. 그러나 다른 합동 조건, 즉 ASA, SSS 등은 공리로 제시하지 않고 있다. 이점에 있어서는 현재 기하교과서와 다르다(다음 장 참조). 그러나, 닮음의 특수한 경우로서 합동을 다루고 있지 않다는 것은 Birkhoff 고유의 방식에 모종의 개량을 가한 것으로 볼 수 있다.

셋째, 다른 교과서들과 마찬가지로 실수와 기하적 양을 연결시키는 동시에 실수의 기본 성질을 받아들임으로써 기하적 양에 대하여 연산을 정의하고 사용할 수 있게 된다.

넷째,《기본 기하학》에서처럼 공리의 수를 제한하여 공리를 압축적으로 제공하기보다는 몇 가지 공리로 나누어 풀어서 서술하고 있다. 이를테면, 공리 2, 3, 4가 모두 길이와 실수를 연결시키는 공리이며, 공리 17, 18, 19, 20이 합쳐져서 넓이 공리군을 형성한다. 이 역시 수학적인 아름다움을 일부 포기하고 학생들의 이해를 돕는 일종의 교수학적 조처로 볼 수 있다.

마지막으로, 닮음 공리를 제시하지 않고, 평행선 공리를 공리 중 하나로 받아들이고 있다 (공리 16). 이는 SMSG 교과서가 평행선 공리를 논리적 배열에 있어 닮음 공리보다 앞에 놓고 있음을 보여주는 데 이 역시 Birkhoff의 초기 구상에서는 벗어나 있는 것이다.

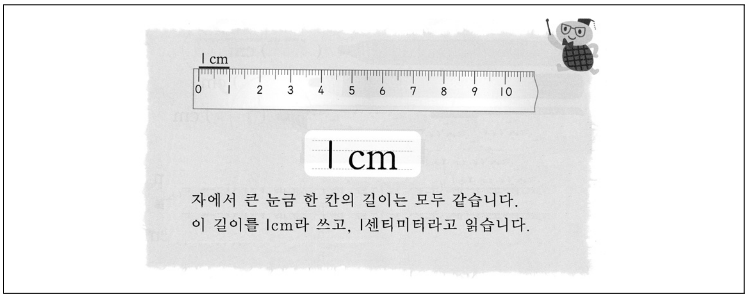
이상에서 우리는 Birkhoff 공리계를 기초로 기하 교과서를 쓰는 경우에도 교수학적 고려에 따라 다른 방식으로 교과서를 기술할 수 있음을 보았다. 다음 장에서는 현재 수학교과서의 기하 부분 속에 들어있는 Birkhoff식 접근을 정리하고 이 방법이 이 장에서 분석한 방법과 어떤 점에서 유사하고 어떤 점에서 다른지를 드러낸다.

Ⅳ. 수와 양의 연결성에 대한 현 수학교과서 분석

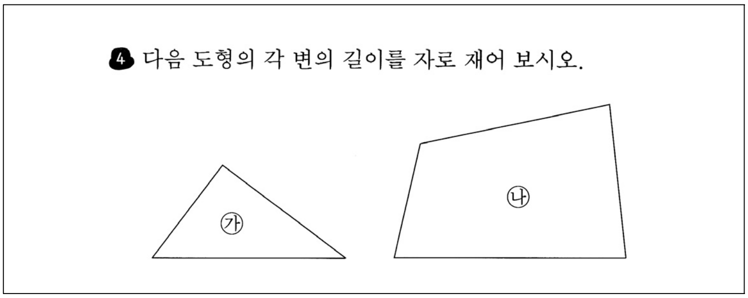
이 장에서는 현 수학교과서에서 길이, 각, 넓이를 실수에 연결시키는 방법은 무엇인지를 살펴봄으로써 Birkhoff 공리계가 현 학교수학에 어떻게 반영되어 있는지를 살펴보고, 삼각형의 합동, 닮음, 평행선 공리를 현 수학교과서[3]에서 다루는 방식을 살펴봄으로써 제Ⅲ장에서 논의한 두 교과서와 현 수학교과서의 특징을 비교한다.

먼저, 길이를 실수에 연결시키는 '직선 측정 공리'는 다음과 같이 반영되어 있다. 먼저 〔그림 1〕에서 볼 수 있듯이 자의 눈금을 통하여 단위길이를 주고, 〔그림 2〕와 같이 도형의 각 변의 길이를 재도록 한다. 이때 도형의 각 변의 길이를 잴 '수' 있으려면 '직선 측정 공리'가 암묵적으로 가정되어 있다고 보아야 한다. 즉, 제Ⅲ장에서 분석한 교과서와는 달리 명시적인 형태로 공리가 제시되지는 않고 있다. '직선 측정 공리'의 상대적으로 명시적인 형태는 고등학교에서 다루어진다(〔그림 3〕). 이는 임의의 두 점 사이의 거리를 함수 $d(A, B)$를 사용하여 설명하는 방식과 유사하다.

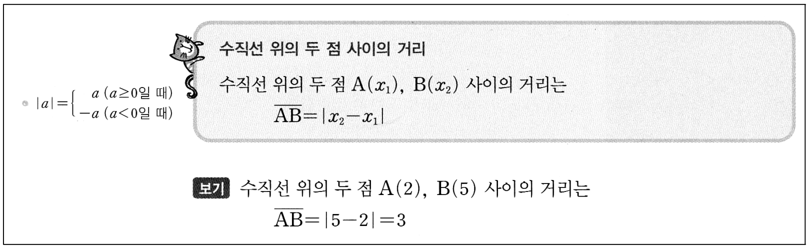
3) 2009년 9월 현재, 초등학교 1, 2학년, 중학교 1학년, 고등학교 1학년은 2007년 개정 교육과정에 따른 교과서를 사용하고 나머지 학년은 제7차 교육과정에 따른 교과서를 사용하고 있다. 이 논문의 교과서 분석 역시 이에 따르고 있다.



〔그림 1〕 단위길이(교육과학기술부, 2009, p. 73)

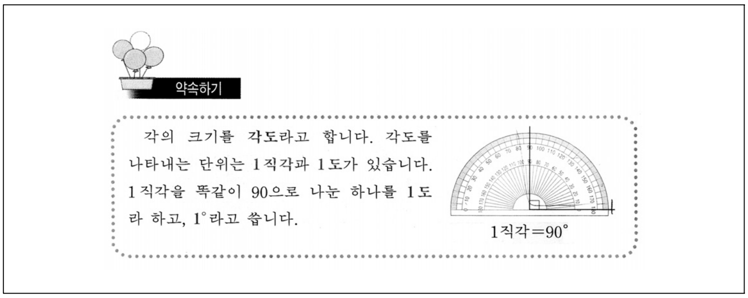


〔그림 2〕 길이재기(교육과학기술부, 2009, p. 79)



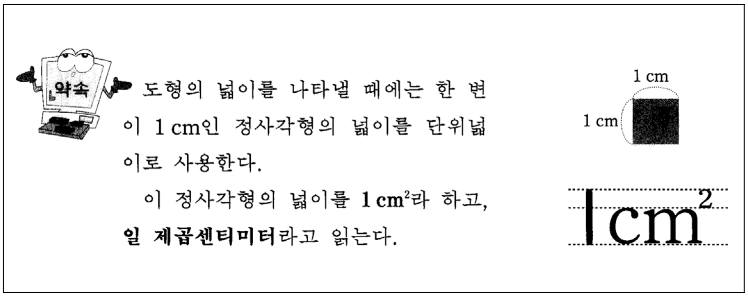
〔그림 3〕 좌표(김서령 외, 2009, p. 156)

다음으로 각도와 실수를 연결하는 '각 측정 공리' 역시 〔그림 4〕에서 볼 수 있는 바와 같이 각도기를 통한 각의 측정 맥락을 통하여 암묵적으로 주어진다.



〔그림 4〕 각도(교육인적자원부, 2006, p. 42)

다음으로 넓이와 실수를 연결하는 '넓이 공리' 역시 〔그림 5〕에서 볼 수 있는 바와 같이 단위 넓이를 정의하는 것으로 시작하여 암묵적으로 주어진다.



〔그림 5〕 넓이(교육인적자원부, 2002, p. 86)

현재의 교과서(교육인적자원부, 2002)에서는 정사각형의 넓이를 제시하고 이를 이용하여 가로의 길이와 세로의 길이가 양의 정수인 직사각형의 넓이를 구하고 이후 직사각형으로 분할되는 평면도형의 넓이를 구하고 이를 다시 일반적인 평면도형의 넓이로 확장하는 방식을 사용한다.

이상에서 살펴본 바와 같이 우리나라 교과서에는 실수와 기하적 양을 연결시키는 공리를 공리라는 이름을 사용하여 명시적으로 가정하고 있지는 않지만, 암묵적으로 가정하여 사용하고 있다. 좌표를 사용하는 특별한 경우를 제외하고는 Birkhoff식 접근에서 사용하는 공리를 암묵적인 형태로 가정하고 있다.

한편, 조태근 등(2009, p. 227)은 하나의 페이지에서, 삼각형의 합동조건을 '세 변의 길이가 각각 같을 때', '두 변의 길이와 그 끼인 각의 크기가 각각 같을 때', '한 변의 길이와 그 양 끝각의 크기가 각각 같을 때'로 나누어 제시하고 있다. 이는 삼각형의 합동조건 세 가지를

모두 기본 가정으로 제시한 것으로 볼 수 있으며, 이는 제Ⅲ장에서 살펴본 두 기하교과서와 다른 점이다.

닮은 도형의 성질은 합동조건을 배운 후 중학교 2학년 과정에서 다루어지는데 “대응하는 선분의 길이의 비는 일정하다.”, “대응하는 각의 크기는 각각 같다.”의 두 가지가 제시된다(조태근 외, 2002, p. 78). 이후 삼각형의 닮음조건을 제시하고 이를 삼각형의 합동조건과 비교하고 있다(조태근 외, 2002, p. 83).

이상의 방법은 닮음조건을 중심으로 교재를 구성한 Birkhoff의 교재의 제시 순서와 다르며, 삼각형의 합동조건 세 가지를 모두 한꺼번에 제시한다는 점에서 SMSG의 기하교과서와도 다르다.

마지막으로 주어진 직선에 대하여 그 직선 위에 있지 않은 한 점을 지나는 평행선이 유일하다는 공리는 학교수학에서 명시적으로 제시된 곳을 찾기 어렵다. 다만 평행선 공리와 논리적으로 동치인 ‘두 직선이 평행하면 엇각의 크기가 같다’가 중학교 1학년 교재에 제시되어 있다(조태근 외, 2009, p. 205).

Ⅴ. 요약 및 결론

현 학교수학의 기본적인 가정 중 하나는 학교수학에서 다루는 기하적 양에 대하여 언제나 유일한 실수를 대응시킬 수 있으며, 기하적 양 사이의 비례관계에 그 각각의 양에 대응되는 실수의 비례관계를 대응시킬 수 있다는 것이다. 우리는 이와 같은 가정을 이론적 토대 위에서 사용할 수 있게 된 것이 통약 불가능한 양을 다루기 위한 수학자들의 긴 세월에 걸친 노력의 산물임을 알았다. 앞에서 살펴본 바와 같이 Birkhoff와 Beatley(1959), SMSG(1960)가 사용한 접근 방법은 첫째로, 초보자가 증명 없이 받아들이기를 열망하는 기본 가정이나 공준이나 직관적으로 확실한 정리를 직관적으로 받아들일 수 있도록 하는, 둘째로, 실수를 받아들임으로써 ‘통약 불가능한 경우’를 별도의 언급 없이 다루고자 하는 의도를 가지고 있다.

제Ⅳ장에서 살펴본 바와 같이 현재의 수학교과서의 기하부분은 이와 같은 취지를 이어받아 양과 수를 연결시키는 가정을 자유롭게 사용하고 있다. 본 연구에서 구체적으로 분석하지는 않았으나, 호의 길이, 부채꼴의 넓이, 입체도형의 부피 등과 같은 기하적 양 역시 실수에 대응시켜 설명하는 방식을 사용하고 있다. 그러나, 그 기본취지가 같다고 하더라도 구체적인 교재의 진술 방식은 차이가 있을 수 있다.

첫째, 공리를 모두 명시적으로 드러내는가에 따라 교재가 구분될 수 있다.《기본 기하학》과 SMSG의 기하교과서는 공리를 명시적으로 드러내고 있으나 현재의 수학교과서는 그렇지

않다.

둘째, 기하적 양과 실수를 연결한다는 철학을 철저하게 따름으로써 '닮음'과 '합동'을 하나의 틀로 설명하는가의 여부에 따라 구분될 수 있다.《기본 기하학》에서는 '닮음 공리'만 제시되고 있을 뿐 합동에 대한 공리가 없으나 SMSG 교과서와 현재의 교과서는 따로 구분하여 설명하고 있다.

마지막으로, 명제의 제시 순서에 따라 구분될 수 있다.《기본 기하학》에서는 실수와 기하적 양을 긴밀하게 연결시켜 공준으로 도입한 후 기하 교과서를 기술하면서 소위 '평행선 공리'를 '피타고라스 정리'(정리 12)에 이어 정리 13으로 위치시킨 후 증명하고 있다. 이는 평행선 공리를 공리 중 하나로 받아들이는 SMSG 교과서와도 다르며, 평행선 공리와 논리적으로 동치인 '두 직선이 평행하면 엇각의 크기가 같다'를 가정하고 있는 현재 학교수학의 교과서와도 다르다.

즉, 현재의 학교수학에서는 실수와 기하적 양을 연결시킨다는 아이디어는 수용하는 한편 단순화와 압축화를 추구하여 다섯 가지의 기본 공준과 일곱 가지 기본 정리만으로 기하를 구축하고자 하였던 Birkhoff의 취지는 반영되지 않는다. 이를 통하여 우리는 현 학교수학이 실수의 기본 성질을 가정하고 기하적 양을 실수와 연결시킴으로써 얻을 수 있는 이득은 취하면서 가정을 축약함으로써 추가적으로 발생하는 학습 부담을 줄이고자 하는 의도를 가지고 있다고 추측할 수 있다.

Birkhoff식 접근, 실수의 성질을 가정하고 기하적 양과 실수를 연결하는 방법과 관련하여 우리가 논의하여야할 또 다른 문제는 기하적 양에 대한 학생들의 오개념이다. 허학도(2006, p. 116)는 넓이 개념에 대한 학생들의 오개념을 분석하면서 정적분으로 직사각형의 넓이 공식을 증명할 수 있다는 순환논법, 통약 가능성에 대한 장애와 극한에 대한 장애, 그리고 불가분량의 장애[4]를 보이는 학생이 많다는 점을 지적하고 있다. 이는 초등학교 교과서에서 넓이 공식을 익힌 후, 학생들이 직사각형의 넓이 공식에 대한 반성의 기회 없이 사용함으로 인하여 기하적 양인 직사각형의 넓이에 대하여 오개념이 형성되었음을 보여준다. 최지선(2008)의 연구결과에서도 기하적 양과 실수 사이의 대응을 가정하고 기하를 전개하는 것이 학생의 이해에 장애를 가져올 수 있음을 확인할 수 있다. 최지선(2008, pp. 197-198)은 닮음 개념에 대한 이해도 조사를 통하여 닮음 개념을 학습한 중학교 3학년 학생들 중의 상당수가 비례관계와 넓이 공식에 의존하여 닮음을 이해할 뿐, 닮음개념을 닮음사상으로 형식화할 수 있는 가능성이 낮은 것으로 분석하고 있다.

실제로 오늘날과 같은 방식의 교과서 진술 방식은 제Ⅱ장에서 살펴본 바와 같이 최근에

4) 각각의 장애에 대한 구체적인 설명은 허학도(2006) 참조

생겨난 방식이다. 더구나, 제Ⅲ장과 제Ⅳ장에서 살펴본 바와 같이 그 진술 방식 안에서도 다양한 변형이 가능하며 그 각각의 구체적인 교육적 효과와 유용성에 대해서도 명확하게 밝혀진 바가 없다. 이는 기하적 양과 실수의 연결성 문제가 교수학적으로 많은 논의의 여지를 여전히 가지고 있음을 보여준다. 이 연구는 그러한 후속 연구의 기초 연구로서 의미를 가질 수 있을 것이다.

NCTM(1989)은 '수학적 연결성'을 다양한 수학적 개념들이 어떻게 서로 연관되어 하나의 일관된 전체를 형성하게 되는지에 대한 학생들의 이해와 활용의 중요성을 강조하고 있다. 이 연구에서 살펴본 논의는 한편으로, 학교수학의 기하 및 측정 부분의 교육내용을 실수개념, 종합기하적 관점 등과 관련하여 연결시켜 이해할 수 있는 통로를 제공한다. Birkhoff식의 접근을 암묵적인 형태가 아닌 명시적인 형태로 공부하는 것도 학생들이, 특히 영재학생들이 실수 개념과 기하적 개념을 연결하여 이해할 수 있는 흥미로운 도전과제이다. 이미 배운 내용에 대하여 필요한 가정의 수를 줄여가는 방법의 기하 학습 역시 수준별 학습, 영재교육의 소재로 합당할 것으로 보이며, 이 연구는 그러한 교육 소재의 개발에 대한 기초 연구로서 역할을 할 수 있을 것으로 보인다.

참 고 문 헌

교육과학기술부(2009). **수학 2-1**. 서울: 두산.

교육인적자원부(2006). **수학 4-가**. 서울: 천재교육.

교육인적자원부(2002). **수학 5-가**. 서울: (주)대한교과서.

권석일(2006). 중학교 기하 교재의 '원론' 교육적 고찰. 박사학위 논문, 서울대학교.

김서령 외 6인(2009). **고등학교 수학**. 서울: 천재교육.

우정호 외 6인(2006). **수학교육학 연구방법론**. 서울: 경문사.

조태근 외 6인(2009). **중학교 수학 1**. 서울: 금성출판사.

조태근 외 4인(2002). **중학교 수학 8-나**. 서울: 금성출판사.

최영기, 이지현(2007). 수학사적 관점에서 본 피타고라스 정리의 증명. **학교수학**, **9**(4), 523-533.

최지선(2008). 닮음 개념에 대한 교수학적 분석. 박사학위 논문, 서울대학교.

허학도(2006). 직사각형 넓이 공식의 이해와 인식론적 장애. 석사학위 논문, 서울대학교.

Birkhoff, G. D. (1932). A set of postulates for plane Geometry(based on scale and protractor). *the Annals of Mathematics, 33*(2), 329-345.

Birkhoff, G. D. & Beatley, R. (1959). *Basic geometry.* New York: Chelsea Publishing Company.

Cajori, F. (1910). Attempts made during the eighteenth and nineteenth centuries to reform the teaching of geometry. *The American Mathematical Monthly, 17*(10), 181-201.

Cederberg, J. N. (1989). *A course in modern geometries.* New York: Springer Verlag.

De Morgan, A. (1836/2007). *The connection of number and magnitude: an attempt to explain the fifth book of Euclid.* Whitefish: Kessinger Publishing.

Eves, H. (1995). **수학사** (이우영, 신항균 역). 서울: 경문사. (원저 1976년 출판)

Gould, S. H. (1957). Origins and development of concepts of geometry. In F. L. Wren; C. B. Allendoerfer; S. Maclane; B. E. Meserve & C. V. Newson(eds.), *Insights into Modern Mathematics* pp. 273-305, Reston: NCTM.

Kline, M. (1972). *Mathematical thought from ancient to modern times.* New York: Oxford University Press.

Lakoff, G. & Núñez, R. E. (1997). The Metaphorical Structure of Mathematics: Sketching out cognitive foundations for a mind-based mathematics. In L. D. English(ed.), *Mathematical reasoning: analogies, metaphors, and images* pp. 21-89. Mahwah: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

Legendre, A. M. (1866). *Elements of geometry and trigonometry,* adapted by Davies, C.. New York: A. S. Brandes & CO.

Malet, A. (2006). Renaissance notions of number and magnitude. *Historia Mathematica, 33.* 63-81.

NCTM (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics.* Reston: NCTM.

NCTM (2000). *Principles and standards for school mathematics.* Reston: NCTM.

Sarton, G. (1935). The first explanation of decimal fractions and measures. *Isis, 23*(1), 153-244.

SMSG (1960). *Geometry : Student's text, part I.* New Heaven: Yale University Press.

Stamper, A. W. (1909). *A history of the teaching of elementary geometry.* New York: AMS press.

• *논문 접수 : 2009년 9월 1일 / 수정본 접수 : 2009년 10월 5일 / 게재 승인 : 2009년 10월 23일*

ABSTRACT

A Didactical Analysis on the Birkhoff's Axiomatic System

Seok-Il Kwon
(Full-time Lecturer, Gyeongin National University of Education)

School geometry has a assumption that a magnitude itself and the proportional relation of magnitude can be numbered. We analyze this kind of assumptions didactically. For this didactical analysis, we examine the Birkhoff's axiomatic system which connects numbers and magnitude by line and angle measure, and the geometry textbooks based on Birkhoff's axiomatic system.

Key words : didactical analysis, Birkhoff, axiomatic systems, mathematical connections, magnitude